Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 11 **23-03-2017**

1. Encontrar los autovalores y autovectores del problema de Sturm-Liouville

$$y'' = \lambda\, y \qquad ; \qquad y'(0) = 0 \qquad ; \qquad y(L) = 0$$

R: $\lambda_n = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$, $y_n(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

2. Encontrar los autovalores y autovectores del problema de Sturm-Liouville

$$y'' = \lambda\, y \qquad ; \qquad y'(0) = 0 \qquad ; \qquad y'(L) = 0$$

R: $\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $y_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, (notar que $y_0 = 1$ es autofunción con autovalor $\lambda_0 = 0$.)

3. Dado el operador: $\mathcal{A} = x^2 \dfrac{d^2}{dx^2} + x\dfrac{d}{dx}$,

   a) demostrar que $\mathcal{A}$ es autoadjunto en $x \in [1, b]$, con condiciones de frontera $y(1) = 0$, $y(b) = 0$. Hallar el peso.

   b) Encontrar los autovalores y autovectores del problema de Sturm-Liouville $\mathcal{A}y = \lambda y$, con condiciones $y(1) = 0$, $y(b) = 0$.

R: a) $w = \dfrac{1}{x}$, b) $\lambda_n = -\left(\dfrac{n\pi}{\ln b}\right)^2$, $y_n(x) = \operatorname{sen}\dfrac{n\pi \ln x}{\ln b}$, $n = 1, 2, \cdots$.

4. Encontrar el desarrollo en serie de Legendre de la función

$$f(x) = \begin{cases} a & , \quad -1 < x < 0 \\ b & , \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

R: $$f(x) = \frac{1}{2}(b+a) + \frac{1}{4}(b-a)\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\,(4j+3)\,(2j)!}{2^{2j}(j+1)!\,j!}\, P_{2j+1}(x)$$

5. Encontrar el desarrollo en serie de $f(x) = x^3$, $x \in [0, 1]$, usando como base el conjunto $\{J_1(\gamma_{1k}x)\}$, con $J_1(\gamma_{1k}) = 0$. R: $x^3 = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\gamma_{1k}^2 - 8)}{\gamma_{1k}^3\, J_2(\gamma_{1k})}\, J_1(\gamma_{1k}x)$

6. Demostrar que: $1 - x^2 = 8 \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_{0k}x)}{\gamma_{0k}^3\, J_1(\gamma_{0k})}$, para $x \in [0, 1]$.

7. Encontrar el desarrollo en serie de $f(x) = x^m$, $m \geq 1$, $x \in [0, 1]$, usando como base el conjunto $\{J_m(\delta_{mk}x)\}$, con $J'_m(\delta_{mk}) = 0$.

R: $$x^m = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{mk}\, J_{m+1}(\delta_{mk})}{(\delta_{mk}^2 - m^2)\,[J_m(\delta_{mk})]^2}\, J_m(\delta_{mk}x)$$