Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 12 **03-04-2017**

1. Hallar la solución $\psi(t,x,y)$ de la ecuación de ondas

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$$

en una membrana rectangular ($0 \le x \le a,\ \ 0 \le y \le b$), con condiciones de frontera

$$\psi(t,0,y) = 0 \quad ; \quad \psi(t,a,y) = 0 \quad ; \quad \psi(t,x,0) = 0 \quad ; \quad \psi(t,x,b) = 0$$

y condiciones iniciales

$$\psi(0,x,y) = xy(a-x)(b-y) \qquad ; \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t}(0,x,y) = 0$$

2. Una esfera de radio a se mantiene a potencial dado por

$$\Phi\,|_{r=a} = V_0\,\cos 3\theta$$

donde V_0 es constante. El potencial satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2\Phi = 0$ en todo el espacio. Hallar Φ en el interior y el exterior de la esfera.

3. a) Hallar el potencial en el interior de un cilindro de radio a y altura L ($0 \le \rho \le a$, $0 \le z \le L$, $0 \le \varphi \le 2\pi$). El potencial satisface la ecuación de Laplace y las condiciones de frontera:

$$\Phi(a,\varphi,z) = 0 \quad ; \quad \Phi(\rho,\varphi,0) = 0 \quad ; \quad \Phi(\rho,\varphi,L) = f(\rho,\varphi)$$

   b) Determinar explícitamente la solución si $f(\rho,\varphi) = f(\rho) = V_0(1 - \frac{\rho^2}{a^2})$, con V_0 constante.

4. Dos esferas concéntricas de radios a y b ($b > a$) se mantienen a potenciales dados por

$$V\,|_{r=a} = V_0\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi \qquad ; \qquad V\,|_{r=b} = V_0\,\cos^2\theta$$

Determinar el potencial para todo r. V satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$.

5. Encontrar la solución $\psi(t,\rho,\varphi)$ de la ecuación de difusión

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

(α constante) en el interior de un disco de radio a con condición de frontera y condición inicial dadas por

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho}(t,a,\varphi) = 0 \qquad ; \qquad \psi(0,\rho,\varphi) = \rho^2$$

6. Encontrar la solución $\psi(t,\rho,\varphi)$ de la ecuación de difusión

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

(α constante) en el interior del cuarto de disco definido por: $0\leq\rho\leq a$, $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$, con condiciones de frontera

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho}(t,a,\varphi)=0 \quad ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}(t,\rho,0)=0 \quad ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}(t,\rho,\frac{\pi}{2})=0$$

y condición inicial

$$\psi(0,\rho,\varphi)=1+\rho^2\cos 2\varphi$$

7. Encontrar la solución $\psi(t,\rho,\varphi,z)$ de la ecuación de ondas

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

(v constante) en el interior de un cilindro de radio a y altura L ($0\leq\rho\leq a$, $0\leq z\leq L$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$), con condiciones de frontera

$$\psi(t,a,\varphi,z)=0 \quad ; \quad \psi(t,\rho,\varphi,0)=0 \quad ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial z}(t,\rho,\varphi,L)=0$$

y condiciones iniciales

$$\psi(0,\rho,\varphi,z)=\beta \text{ (constante)} \quad ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{t}}(0,\rho,\varphi,\mathrm{z})=0$$

8. El potencial en la superficie de un conductor esférico de radio a está dado por

$$V\,|_{r=a}\begin{cases} V_0 & , \quad 0\leq\theta<\alpha \\ \\ 0 & , \quad \alpha<\theta\leq\pi \end{cases}$$

Hallar el potencial que satisface $\nabla^2 V=0$ en el interior y el exterior del conductor.

9. Un cubo de lado b se mantiene a temperatura constante T_o en las paredes $z=0$ y $z=b$, mientras que las paredes restantes se mantienen a temperatura cero. Hallar la temperatura de equilibrio ($\nabla^2 T=0$) en el interior del cubo.

10. Una partícula encerrada en una esfera de radio a satisface la ecuación de Schrödinger

$$\nabla^2\Psi+k^2\Psi=0 \qquad , \qquad k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$$

junto con la condición

$$\Psi\,|_{r=a}=0$$

Probar que la energía mínima necesaria para obtener una solución no-trivial es

$$E_{min}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

Respuestas

1)

$$\psi(t,x,y) = \frac{64a^2b^2}{\pi^6}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\omega_{jk}t}{(2j+1)^3(2k+1)^3}\,\mathrm{sen}\,\tfrac{(2j+1)\pi x}{a}\,\mathrm{sen}\,\tfrac{(2k+1)\pi y}{b}$$

$$\omega_{jk} = v\pi\sqrt{\frac{(2j+1)^2}{a^2}+\frac{(2k+1)^2}{b^2}}$$

2)

$$\Phi(r,\theta) = \frac{V_0}{5}\left[8\left(\frac{r}{a}\right)^3 P_3(\cos\theta) - 3\left(\frac{r}{a}\right)P_1(\cos\theta)\right],\ r \le a$$

$$\Phi(r,\theta) = \frac{V_0}{5}\left[8\left(\frac{a}{r}\right)^4 P_3(\cos\theta) - 3\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_1(\cos\theta)\right],\ r \ge a$$

3b)

$$\Phi(\rho,z) = 8V_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\gamma_{0n}\rho}{a}\right)\,\mathrm{senh}\frac{\gamma_{0n}z}{a}}{\gamma_{0n}^3 J_1(\gamma_{0n})\,\mathrm{senh}\frac{\gamma_{0n}L}{a}}$$

4)

$$r < a \quad , \quad V = V_0\left(\frac{r}{a}\right)\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi$$

$$a < r < b \quad , \quad V = \frac{1}{3}V_0\Big[\left(\frac{b}{r}\right)\left(\frac{r-a}{b-a}\right) + 3\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(\frac{b^3-r^3}{b^3-a^3}\right)\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi$$

$$+\left(\frac{b}{r}\right)^3\left(\frac{r^5-a^5}{b^5-a^5}\right)(3\cos^2\theta - 1)\Big]$$

$$r > b \quad , \quad V = \frac{1}{3}V_0\left(\frac{b}{r}\right)\left[1+\left(\frac{b}{r}\right)^2(3\cos^2\theta - 1)\right]$$

5)

$$\psi(t,\rho,\varphi) = \psi(t,\rho) = \frac{a^2}{2} + 4a^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha\delta_{0k}^2 t/a^2}}{\delta_{0k}^2 J_0(\delta_{0k})}J_0(\tfrac{\delta_{0k}\rho}{a})$$

6)

$$\psi(t,\rho,\varphi) = 1 + 4a^2\cos 2\varphi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha\delta_{2k}^2 t/a^2}}{(\delta_{2k}^2-4)J_2(\delta_{2k})}J_2(\tfrac{\delta_{2k}\rho}{a})$$

7)

$$\psi(t,\rho,\varphi,z) = \psi(t,\rho,z) = \frac{8\beta}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\omega_{nk}t}{(2n+1)\,\gamma_{0k}\,J_0'(\gamma_0 k)}\,\mathrm{sen}\,\tfrac{(2n+1)\pi z}{2L}\,J_0(\tfrac{\gamma_{0k}\rho}{a})$$

$$\omega_{nk}^2 = \frac{\gamma_{0k}^2}{a^2} + \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$$

8)

$$r < a \quad , \quad V = \frac{V_0}{2}(1-\cos\alpha) + \frac{V_0}{2}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left[P_{\ell-1}(\cos\alpha) - P_{\ell+1}(\cos\alpha)\right]\left(\frac{r}{a}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta)$$

$$r > a \quad , \quad V = \frac{V_0}{2}(1-\cos\alpha)\left(\frac{a}{r}\right) + \frac{V_0}{2}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left[P_{\ell-1}(\cos\alpha) - P_{\ell+1}(\cos\alpha)\right]\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell+1} P_\ell(\cos\theta)$$

9)

$$T(x,y,z) = \frac{16T_0}{\pi^2}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,\frac{(2j+1)\pi x}{b}\,\mathrm{sen}\,\frac{(2k+1)\pi y}{b}}{(2j+1)(2k+1)\mathrm{senh}\,b\nu_{jk}}\left[\mathrm{senh}\,\nu_{jk}z + \mathrm{senh}\,\nu_{jk}(b-z)\right]$$

$$\nu_{jk} = \frac{\pi}{b}\sqrt{(2j+1)^2 + (2k+1)^2}$$