Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 2 **18-01-2017**

1. Evaluar las integrales:
$$\text{a)}\ \int_\gamma \overline{z}^3\, dz \qquad ; \qquad \text{b)}\ \int_\gamma z^3\, dz$$
para $\gamma(t) = 1 + 2\, e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. R: a) $24i\pi$, b) 0

2. Evaluar la integral:
$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$$
donde γ es la curva: a) $\gamma(t) = i + 2\cos t + 3i \operatorname{sen} t$, b) $\gamma(t) = 4 + 2\cos t + 3i \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 6\pi]$.
R: a) $6i\pi$, b) 0

3. Evaluar las integrales:
$$\text{a)}\ \int_\gamma \frac{z}{\cosh z}\, dz \quad ; \quad \text{b)}\ \int_\gamma \operatorname{ctg} z\, dz \quad ; \quad \text{c)}\ \int_\gamma \frac{dz}{(z^2+4)^3} \quad ; \quad \text{d)}\ \int_\gamma \frac{z^2}{\operatorname{sen} z} dz$$
para las curvas dadas por $\gamma(t) = 4\, e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ y $\gamma(t) = 2i + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
R: a) $2i\pi^2$, $i\pi^2$; b) $6i\pi$, 0 ; c) 0, $\dfrac{3\pi}{256}$; c) $-4i\pi^3$, 0

4. Hallar los primeros cuatro términos de la serie de Laurent alrededor de $z = 0$, y en $0 < |z| < 1$, de las funciones:
$$\text{a)}\ f(z) = \frac{1}{e^z - 1} \qquad ; \qquad \text{b)}\ f(z) = \frac{1}{z} \operatorname{ctg} z$$
R: a) $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{z}{12} - \dfrac{z^3}{720} + \cdots$; b) $\dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{z^2}{45} - \dfrac{2z^4}{945} + \cdots$

5. Hallar la serie de Laurent alrededor de $z = 0$, y en $0 < |z| < \infty$, de las funciones:
$$\text{a)}\ f(z) = z^4\, e^{1/z} \qquad ; \qquad \text{b)}\ f(z) = \frac{1}{z} \cos \frac{1}{z^2}$$
R: a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{4-k}}{k!}$; b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!\, z^{4k+1}}$

6. Hallar la serie de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z(1+z^2)}$ alrededor de $z = 0$, en: a) $0 < |z| < 1$, b) $|z| > 1$.
R: a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, z^{2k-1}$; b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{2k+3}}$

7. Clasificar las singularidades en $\mathbb{C}$, y determinar los respectivos residuos, de las siguientes funciones:

a) $f(z) = e^{z/(z-1)}$ b) $f(z) = \operatorname{tg}^2 z$

c) $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ d) $f(z) = \dfrac{1}{z - z^4}$

e) $f(z) = \dfrac{1}{z(e^{2z} - 1)}$ f) $f(z) = \dfrac{\operatorname{ctg} z}{z}$

g) $f(z) = \dfrac{1}{(1 + z^2)^2}$ h) $f(z) = \dfrac{e^z - 1 - z}{z^3}$

i) $f(z) = \dfrac{z + 1}{z^2 - iz + 2}$ j) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 \tanh z}$

k) $f(z) = z^3 \cos \dfrac{1}{z}$ l) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^4}$

Respuestas ($n \in \mathbb{Z}$)

a) $z = 1$, singularidad esencial, $\operatorname{Res}(f, 1) = e$.

b) $z_n = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, polos dobles, $\operatorname{Res}(f, z_n) = 0$.

c) $z = 0$, sing. removible. $z_n = 2in\pi$, $n \neq 0$, polos simples, $\operatorname{Res}(f, z_n) = 2in\pi$.

d) $z = 0$, polo simple, $\operatorname{Res}(f, 0) = 1$. $z_k = e^{2i\pi k/3}$, $k = 0, 1, 2$, polos simples, $\operatorname{Res}(f, z_k) = -\frac{1}{3}$.

e) $z = 0$, polo doble, $\operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{1}{2}$. $z_n = in\pi$, $n \neq 0$, polos simples, $\operatorname{Res}(f, z_n) = -\frac{i}{2n\pi}$.

f) $z = 0$, polo doble, $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$. $z_n = n\pi$, $n \neq 0$, polos simples, $\operatorname{Res}(f, z_n) = \frac{1}{n\pi}$.

g) $z = \pm i$, polos dobles, $\operatorname{Res}(f, \pm i) = \mp \frac{i}{4}$.

h) $z = 0$, polo simple, $\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{2}$.

i) $z = -i$, polo simple, $\operatorname{Res}(f, -i) = \frac{1}{3}(1 + i)$. $z = 2i$, polo simple, $\operatorname{Res}(f, 2i) = \frac{1}{3}(2 - i)$.

j) $z = 0$, polo triple, $\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{3}$. $z_n = in\pi$, $n \neq 0$, polos simples, $\operatorname{Res}(f, z_n) = -\frac{1}{n^2\pi^2}$.

k) $z = 0$, singularidad esencial, $\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{24}$.

l) $z = 0$, polo triple, $\operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{1}{6}$.