Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 1 **5-4-02**

1. Graficar las regiones determinadas por las desigualdades:

   a) $|2z + 1 + i| < 4$ b) $|z| \leq |z + 1|$

2. Utilizar $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha$ para demostrar que $\mathrm{sen}\,3\theta = 3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}^3\theta$.

3. Resolver,

   a) $z^6 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$ b) $z^4 - iz^2 - 1 = 0$

4. Utilizando las definiciones de las funciones trigonométricas e hiperbólicas, probar

   a) $\mathrm{arc\ tanh}\ z = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$

   b) $|\mathrm{sen}\,z|^2 = \mathrm{sen}^2 x + \mathrm{senh}^2 y \qquad (z = x + iy)$

5. Dada $u(x,y) = e^{-2y}\,\mathrm{sen}\,2x$,

   a) probar que $u(x,y)$ puede ser la parte real de una función analítica.

   b) determinar la función conjugada $v(x,y)$ tal que $u + iv$ sea analítica.

   Repetir para $u(x,y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

6. Evaluar las siguientes expresiones en la hoja $-\pi \leq \theta < \pi$:

   a) $(1 - i)^{1+i}$ b) $(-i)^i$

7. Dada la transformación $w = z + \dfrac{1}{z}$, hallar la imagen de todos los puntos con $|z| = 1$ e $\mathrm{Im}\,z > 0$.

8. Dada la función $f(z) = (z - 2i)^{1/4}$,

   a) hallar los puntos de ramificación en $\mathbb{C} + \{\infty\}$

   b) determinar cortes de rama tal que $f(z)$ sea univaluada.

   c) describir la superficie de Riemann asociada a $f(z)$.

   Repetir para $f(z) = \sqrt{z^6 - 3iz^5 - 7z^4 + 15iz^3 + 14z^2 - 12iz - 8}$ y $f(z) = (z^3 - 1)^{-1/3}$.

1. Evaluar las integrales
$$\text{a)}\ \int_\gamma \overline{z}\,dz \quad ; \quad \text{b)}\ \int_\gamma z\,dz$$
para $\gamma(t) = 2\,\mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

2. Evaluar la integral
$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz$$
donde γ es la curva $\gamma(t) = 6\cos t + 8i\,\mathrm{sen}\,t$, $t \in [0, 6\pi]$.

3. Evaluar las integrales:
$$\text{a)}\ \int_\gamma \frac{z}{\cos z}\,dz \quad ; \quad \text{b)}\ \int_\gamma \mathrm{tg}\,z\,dz \quad ; \quad \text{c)}\ \int_\gamma \frac{z^2}{\mathrm{sen}\,z}\,dz$$
para las curvas dadas por $\gamma(t) = 5\,\mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ y $\gamma(t) = 1 + i + \mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

4. Hallar los primeros cinco términos de la serie de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{\mathrm{sen}\,z}$ alrededor de $z = 0$, en $0 < |z| < 1$.

5. Hallar la serie de Laurent de $f(z) = z^5 \cos\dfrac{1}{z}$ alrededor de $z = 0$, en $0 < |z| < \infty$.

6. Hallar la serie de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z(1 - z^2)}$ alrededor de $z = 0$, en $0 < |z| < 1$ y en $|z| > 1$.

7. Clasificar las singularidades y determinar los residuos de las siguientes funciones:

   a) $f(z) = \mathrm{e}^{z/(1-z)}$

   b) $f(z) = \mathrm{tg}^2\, z$

   c) $f(z) = \dfrac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$

   d) $f(z) = \dfrac{1}{z - z^4}$

   e) $f(z) = \dfrac{1}{z(\mathrm{e}^{2z} - 1)}$

   f) $f(z) = \dfrac{\mathrm{ctg}\,z}{z}$

   g) $f(z) = \dfrac{1}{(1 + z^2)^2}$

Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 3 **26-4-02**

1. Demostrar
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6}\,dx \;=\; \frac{2\pi}{3}$$

2. Demostrar
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2(x^2+2x+2)}\,dx \;=\; \frac{7\pi}{50}$$

3. Utilizar el teorema de residuos para demostrar
$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x^n)^2}\,dx \;=\; \frac{\pi\,(n-a)}{n^2 \operatorname{sen}\frac{\pi a}{n}} \qquad ; \qquad 0 < a < 2n$$

4. Utilizar el teorema de residuos para demostrar
$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^2(1+x^2)}\,dx \;=\; \frac{\pi}{2\operatorname{sen}\pi a}\left(2 - a - \operatorname{sen}\frac{\pi a}{2}\right) \qquad ; \qquad 0 < a < 4$$

5. Utilizando cálculo de residuos, demostrar
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\,\cos\theta}\,d\theta \;=\; \frac{\pi}{12}$$

6. Utilizando cálculo de residuos, demostrar
$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta}\, e^{3i\theta}\,d\theta \;=\; \frac{\pi}{3}$$

`Ayuda:  hacer el cambio de variables` $z = e^{i\theta}$

7. Demostrar
$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-1)(x^2-4x+5)}\,dx \;=\; \frac{\pi}{2}$$

8. Demostrar
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{x^4+4}\,dx \;=\; \frac{\pi}{8}\,e^{-b}\,(\cos b + \operatorname{sen} b) \qquad ; \qquad b > 0$$

9. Utilizar cálculo de residuos para demostrar
$$\text{a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \;=\; \frac{\pi^3}{32} \qquad ; \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\frac{1}{4})^2} \;=\; 2\pi^2$$

Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 4 **6-5-02**

1. Evaluar las integrales

$$\text{a)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^8}\, x^2\, dx \qquad \text{b)}\int_0^{\pi/2} (\sec\theta)^{1/4} d\theta \qquad \text{c)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^6}\, x^4\, dx \qquad \text{d)}\int_0^{\pi/2} (\mathrm{tg}\,\theta)^{1/2} d\theta$$

`Usar:` $\Gamma(\frac{1}{8}) = 7.5339$, $\Gamma(\frac{3}{8}) = 2.3704$, $\Gamma(\frac{1}{6}) = 5.5663$

2. Utilizar funciones Γ y B para probar que

$$\text{a)} \int_{-1}^{1} x^8 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{7\pi}{256} \quad ; \quad \text{b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^6\, d\theta = \frac{5\pi}{32} \quad ; \quad \text{c)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{tg}\,\theta)^{-\frac{2}{3}}\, (\mathrm{sen}\,\theta)^2\, d\theta = \frac{\pi}{6}$$

3. Usar funciones Digamma para probar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+6)} = \frac{19}{80}$$

4. Determinar el comportamiento asintótico ($t \gg 1$) de la función modificada de Bessel $K_\nu(t)$ a partir de la representación integral

$$K_\nu(t) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^{\nu-1}\, e^{-\frac{t}{2}(x+\frac{1}{x})}\, dx$$

Verificar que se cumplen las condiciones necesarias para aplicar el método del descenso rápido.

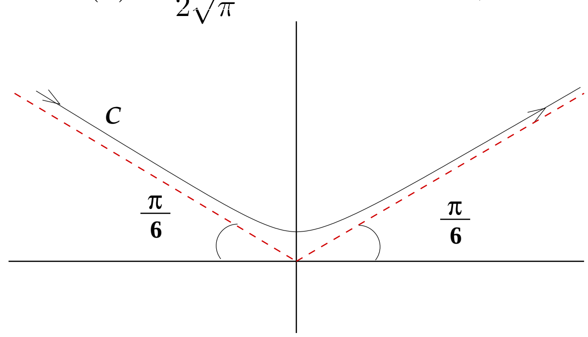
5. Dada la representación integral de la función de Airy

$$Ai(t^{2/3}) = \frac{t^{1/3}}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} e^{it(z+\frac{z^3}{3})}\, dz$$

a) Verificar que se cumplen las condiciones necesarias para aplicar el método del descenso rápido en la aproximación de la integral cuando $t \gg 1$.

b) Probar que

$$Ai(u) \simeq \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, u^{-1/4}\, e^{-\frac{2}{3}u^{3/2}} \qquad , \qquad u \gg 1$$



Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 5 **13-5-02**

1. Hallar la solución general de:

   a) $y'' - \frac{2}{z^2}\, y = z \ln z$

   b) $y'' - \frac{3}{z}\, y' + \frac{4}{z^2}\, y = z$

2. Localizar y clasificar todos los puntos singulares (en $\mathbb{C} + \{\infty\}$) de las ecuaciones diferenciales:

   a) $z^2(z-4)y'' + (z-4)y' + 2y = 0$

   b) $z^2(z^2+1)y'' + z(z^2+1)y' - y = 0$

   c) $z^4 y'' + y = 0$

   d) $z^3(z+1)y'' + 2z^3 y' + 4y = 0$

3. Dada la ecuación de Hermite:
$$y'' - 2zy' + 2\lambda y = 0$$

   a) Clasificar los puntos singulares.

   b) Hallar dos soluciones linealmente independientes alrededor de $z = 0$. Determinar el radio de convergencia.

   c) Probar que para $\lambda = m \in \mathbb{N}$, una solución se convierte en un polinomio. Determinar estos polinomios cuando $\lambda = 2, 3$.

4. Hallar dos soluciones linealmente independientes alrededor de $z = 0$ de la ecuación:
$$(9 + z^2)\, y'' - 2y = 0$$
   Determinar el radio de convergencia.

5. Dada la ecuación de Laguerre:
$$zy'' + (1-z)y' + \lambda y = 0$$

   a) Clasificar los puntos singulares.

   b) Utilizar el método de Fröbenius para hallar una solución alrededor de $z = 0$. Determinar el radio de convergencia.

   c) Probar que para $\lambda = m \in \mathbb{N}$, la solución anterior se convierte en un polinomio. Determinar estos polinomios cuando $\lambda = 1, 2$.

   d) Encontrar una segunda solución independiente cuando $\lambda = 0$. ¿ Es esta solución analítica en $z = 0$? `Ayuda:` $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots$

1. Utilizar el método de Fröbenius para hallar dos soluciones linealmente independientes, alrededor de $z = 0$, de la ecuación:
$$z(z+2)y'' + (1+z)y' - y = 0.$$

2. Dada la ecuación:
$$z(1+z)\,y'' - \,y' - 2\,y = 0,$$
utilizar el método de Fröbenius para hallar una solución $y_1(z)$ alrededor de $z = 0$. Hallar una solución $y_2(z)$ linealmente independiente de $y_1(z)$. ¿ Es $y_2(z)$ analítica en $z = 0$? Justifique su respuesta.

3. Demostrar que la solución general de la ecuación $4z(z-1)y'' + (8z-2)y' + y = 0$, alrededor de $z_0 = 1$, está dada por:
$$y = c_1\,F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},1-z) + c_2\,(1-z)^{-1/2}.$$

4. Dada la la ecuación:
$$4z(z-1)\,y'' - 2\,y' + \,y = 0,$$
encontrar dos soluciones linealmente independientes alrededor de $z = 0$. Determinar la solución analítica en $z = 0$ y que satisface $y(1) = 1$.

5. Probar que la ecuación $zy'' - (1+z)y' - 3y = 0$ tiene una solución analítica en $z_0 = 0$ dada por
$$y_1 = z^2 M(5,3,z) = z^2 e^z (1 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{12}z^2).$$
¿ Es la segunda solución independiente analítica en $z_0 = 0$?

6. El período T de un péndulo simple (longitud ℓ) puede expresarse en términos de una integral elíptica según:
$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2\text{sen}^2\varphi}} \qquad ; \qquad K = \text{sen}\theta_M/2,$$
donde θ_M es el ángulo de máxima amplitud.

   a) Usando la representación integral de $F(a,b,c,z)$ probar que
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,K^2).$$

   b) Probar entonces que
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,(1 + \frac{1}{16}\theta_M^2 + \cdots).$$

1. Dada la ecuación de Bessel
$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+(z^2-\nu^2)y=0$$

   a) Probar que la transformación $y(z)=z^\nu e^{-iz}u(z)$ convierte la ecuación en
$$z\frac{d^2u}{dz^2}+[(2\nu+1)-2iz]\frac{du}{dz}-i(2\nu+1)u=0$$

   b) Hacer el cambio de variable $w=2iz$ para obtener
$$w\frac{d^2u}{dw^2}+[(2\nu+1)-w]\frac{du}{dw}-(\nu+\frac{1}{2})u(w)=0$$

   c) Usar los resultados anteriores y la condición $J_\nu(z)\to z^\nu/2^\nu\Gamma(\nu+1)$ cuando $z\to 0$, para probar finalmente que
$$J_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu e^{-iz}M(\nu+\frac{1}{2},2\nu+1;2iz)$$

2. Determinar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales alrededor de los puntos indicados. Hallar la región de convergencia de cada solución independiente. Indicar si la ecuación es directamente, o con un cambio de variable sencillo, de tipo Hipergeométrica, Hipergeométrica Confluente o Bessel.

   a) $y''-zy'+y=0$; $z_0=0$

   b) $z^4y''+z(2z^2-1)y'+y=0$; $z_0=\infty$

   c) $(2-z^2)y''+2zy'-2y=0$; $z_0=0$

   d) $2z^2y''+3zy'-y=0$; $z_0=0$

   e) $2(z-4)y''+(5-z)y'-y=0$; $z_0=4$

   f) $2z(z-1)y''-y'-4y=0$; $z_0=0,1$

   g) $2z^2y''-z(1+2z)y'+(1+4z)y=0$; $z_0=0$

   h) $z^2y''-z(1+z)y'+y=0$; $z_0=0$

   i) $zy''+y'+zy=0$; $z_0=0$

   j) $zy''+(1-z)y'-y=0$; $z_0=0$

   k) $z(1-z)y''+(2-z)y'+4y=0$; $z_0=0,1$

1. Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + e^{2z} y = 0$$

`Ayuda: hacer el cambio de variable` $w = e^z$

2. Dada la la ecuación

$$z^2\, y'' + z\, y' + (z^2 - \frac{1}{4})\, y = 0$$

a) Encontrar dos soluciones linealmente independientes alrededor de $z = 0$.

b) Determinar la solución que satisface $y(\frac{\pi}{4}) = 0,\ \ y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

3. a) Probar que $y(z) = z^\alpha N_\alpha(z)$ es solución de la ecuación

$$z\, y'' - (2\alpha - 1)\, y' + z\, y = 0$$

b) Hallar la solución general de la ecuación

$$z\, y'' - 7\, y' + z\, y = 0$$

4. Dada la la ecuación

$$z\, y'' - \ y' - z\, y = 0$$

a) Encontrar dos soluciones linealmente independientes alrededor de $z = 0$.
`Ayuda: hacer la transformación` $y(z) = z\, u(z)$.

b) Determinar la solución que satisface las condiciones $y(1) = 1$ y $y(z)$ acotada cuando $z \to \infty$.

5. Encontrar la solución general de la ecuación inhomogénea

$$x^2\, y'' + x\, y' - (x^2 + 4) = f(x)$$

con condiciones de borde $y(0) = 0$ y $y(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$.

`Ayuda: Usar la fórmula de Abel y el límite` $x \to 0$ `de` $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$, `para demostrar que` $W[K_\nu, I_\nu] = 1/x$

6. Probar que:

a) $\int J_0(x)\, \mathrm{sen} x\, dx = x J_o(x)\, \mathrm{sen} x - x J_1(x)\, \cos x + c$

b) $\int x^5 J_2(x)\, dx = 6(8x^2 - x^4)\, J_0(x) - x(x^4 - 24x^2 + 16)\, J_1(x) + c$

1. Demostrar la relación de recurrencia

$$(2n+1)\, z\, P_n(z) = (n+1)\, P_{n+1}(z) + n\, P_{n-1}(z)$$

`Ayuda: Utilizar` $(1-2zt+t^2)\dfrac{\partial g}{\partial t} = (z-t)g\,.$

2. Demostrar que

$$\int_0^1 P_\ell(x)\, dx = \frac{P_{\ell-1}(0)}{\ell+1} = \begin{cases} 0 & , \quad \ell = 2n \\ \\ \dfrac{(-1)^n\,(2n)!}{2^{2n+1}\,(n+1)!\,n!} & , \quad \ell = 2n+1 \end{cases}$$

`Ayuda: Usar relaciones de recurrencia y propiedades de` $P_\ell(x)$.

3. Evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx$$

4. Dada la ecuación de Laguerre: $x\, y'' + (1-x)\, y' + n\, y = 0$, probar que

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\, L_m(x)\, L_n(x)\, dx = c_n\, \delta_{m,n}$$

Evaluar c_n utilizando la función generadora de los $L_n(x)$.

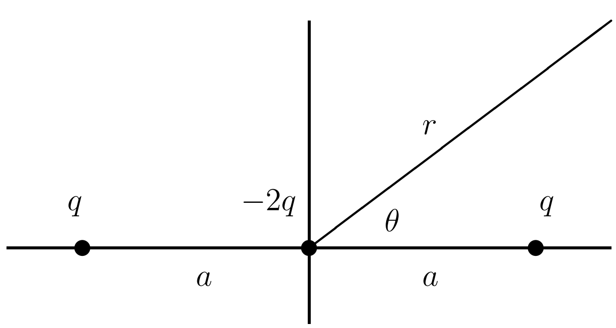
5. Evaluar las integrales:

$$\text{a)} \int_{-1}^{1} x^2\, P_\ell(x)\; dx \quad ; \quad \text{b)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, x^2\, H_n(x)\; dx \quad ; \quad \text{c)} \int_0^{\infty} e^{-x}\, x^3\, L_5(x)\; dx$$

6. Probar que el potencial eléctrico producido por el cuadrupolo de la figura a una distancia r del origen $(r > a)$, está dado por

$$V(r) = \frac{2q}{r} \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}(\cos\theta) \left(\frac{a}{r}\right)^{2n}$$

Probar que para $r \gg a$, $V(r) \simeq \dfrac{qa^2}{r^3}\,(3\,\cos^2\theta - 1)$.



1. Encontrar los autovalores y autovectores del problema de Sturm-Liouville

$$y'' = \lambda\, y \qquad ; \qquad y'(0) = 0 \qquad ; \qquad y(L) = 0$$

2. Encontrar los autovalores y autovectores del problema de Sturm-Liouville

$$y'' = \lambda\, y \qquad ; \qquad y'(0) = 0 \qquad ; \qquad y'(L) = 0$$

3. Encontrar el desarrollo en serie de Legendre de la función

$$f(x) = \begin{cases} a & , \quad -1 < x < 0 \\ \\ b & , \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

4. Encontrar el desarrollo en serie de $f(x) = x^3$, $x \in [0,1]$, usando como base el conjunto $\{J_1(\gamma_{1k}x)\}$, con $J_1(\gamma_{1k}) = 0$.

5. Demostrar que

$$1 - x^2 = 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_{0k}x)}{\gamma_{0k}^3\, J_1(\gamma_{0k})}$$

para $x \in [0,1]$.

6. Encontrar el desarrollo en serie de $f(x) = x^m$, $m \geq 1$, $x \in [0,1]$, usando como base el conjunto $\{J_m(\delta_{mk}x)\}$, con $J'_m(\delta_{mk}) = 0$

1) Dos esferas concéntricas de radios a y b ($b > a$) se mantienen a potenciales dados por

$$V\,|_{r=a} = V_0 \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \qquad ; \qquad V\,|_{r=b} = V_0\, \cos^2\theta$$

Determinar el potencial para todo r. V satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$.

2) Encontrar la solución $\psi(t, \rho, \varphi)$ de la ecuación de difusión

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

(α constante) en el interior de un disco de radio a con condición de frontera y condición inicial dadas por

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho}(t, a, \varphi) = 0 \qquad ; \qquad \psi(0, \rho, \varphi) = \rho^2$$

3) Hallar la solución $\psi(t, x, y)$ de la ecuación de ondas

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$$

en una membrana rectangular ($0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b$), con condiciones de frontera

$$\psi(t, 0, y) = 0 \quad ; \quad \psi(t, a, y) = 0 \quad ; \quad \psi(t, x, 0) = 0 \quad ; \quad \psi(t, x, b) = 0$$

y condiciones iniciales

$$\psi(0, x, y) = xy(x - a)(y - b) \qquad ; \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t}(0, x, y) = 0$$

4) Encontrar la solución $\psi(t, \rho, \varphi)$ de la ecuación de difusión

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

(α constante) en el interior del cuarto de disco definido por: $0 \le \rho \le a$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, con condiciones de frontera

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho}(t, a, \varphi) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}(t, \rho, 0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}(t, \rho, \frac{\pi}{2}) = 0$$

y condición inicial

$$\psi(0, \rho, \varphi) = 1 + \rho^2 \cos 2\varphi$$

5) Encontrar la solución $\psi(t,\rho,\varphi,z)$ de la ecuación de ondas

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

(v constante) en el interior de un cilindro de radio a y altura L ($0 \leq \rho \leq a$, $0 \leq z \leq L$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$), con condiciones de frontera

$$\psi(t,a,\varphi,z) = 0 \quad ; \quad \psi(t,\rho,\varphi,0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial z}(t,\rho,\varphi,L) = 0$$

y condiciones iniciales

$$\psi(0,\rho,\varphi,z) = \beta \text{ (constante)} \quad ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{t}}(0,\rho,\varphi,\mathrm{z}) = 0$$

6) El potencial en la superficie de un conductor esférico de radio a está dado por

$$V\,|_{r=a} \begin{cases} V_o & , \quad 0 \leq \theta < \alpha \\ & \\ 0 & , \quad \alpha < \theta \leq \pi \end{cases}$$

Hallar el potencial que satisface $\nabla^2 V = 0$ en el interior y el exterior del conductor.

7) Un cubo de lado b se mantiene a temperatura constante T_o en las paredes $z=0$ y $z=b$, mientras que las paredes restantes se mantienen a temperatura cero. Hallar la temperatura de equilibrio ($\nabla^2 T = 0$) en el interior del cubo.

8) Una partícula encerrada en una esfera de radio a satisface la ecuación de Schrödinger

$$\nabla^2\Psi + k^2\Psi = 0 \qquad , \qquad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

junto con la condición

$$\Psi\,|_{r=a} = 0$$

Probar que la energía mínima necesaria para obtener una solución no-trivial es

$$E_{min} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$