

1. Graficar las regiones determinadas por las desigualdades:

a)  $|3z - 2 - i| < 5$       b)  $|z| \geq |z - i|$

2. Utilizar  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$  para demostrar que  $\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta$ .

3. Resolver,

a)  $z^5 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$       b)  $z^6 - 2iz^3 - 2 = 0$

4. Utilizando las definiciones de las funciones trigonométricas e hiperbólicas, probar

a)  $\operatorname{arc} \operatorname{ctgh} z = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{z+1}{z-1} \right)$

b)  $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y$       ( $z = x + iy$ )

5. Dada  $u(x, y) = e^{x^2-y^2} \cos 2xy$ ,

a) probar que  $u(x, y)$  puede ser la parte real de una función analítica.

b) determinar la función conjugada  $v(x, y)$  tal que  $u + iv$  sea analítica.

Repetir para  $u(x, y) = \cos x \operatorname{senh} y$ .

6. Evaluar las siguientes expresiones en la hoja  $-\pi \leq \theta < \pi$ :

a)  $(1+i)^{1-i}$       b)  $i^i$

7. Dada la transformación  $w = z - \frac{1}{z}$ , hallar la imagen de todos los puntos con  $|z| = 1$  y  $\operatorname{Re} z > 0$ .

8. Dada la función  $f(z) = (z-i)^{1/3}$ ,

a) hallar los puntos de ramificación en  $\mathbb{C} + \{\infty\}$

b) determinar cortes de rama tal que  $f(z)$  sea univaluada.

c) describir la superficie de Riemann asociada a  $f(z)$ .

Repetir para  $f(z) = \sqrt{z^4 - 1}$ .

1. Evaluar las integrales

$$\text{a) } \int_{\gamma} \bar{z} dz \quad ; \quad \text{b) } \int_{\gamma} z dz$$

para  $\gamma(t) = 2e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

2. Evaluar la integral

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$$

donde  $\gamma$  es la curva  $\gamma(t) = 2 \cos t + 3i \sin t$ ,  $t \in [0, 6\pi]$ .

3. Evaluar las integrales:

$$\text{a) } \int_{\gamma} \frac{z^2}{\cos z} dz \quad ; \quad \text{b) } \int_{\gamma} \operatorname{tg} z dz \quad ; \quad \text{c) } \int_{\gamma} \frac{z}{\sin z} dz$$

para las curvas dadas por  $\gamma(t) = 4e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  y  $\gamma(t) = 3 + e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

4. Hallar los primeros cinco términos de la serie de Laurent de  $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$  alrededor de  $z = 0$ , en  $0 < |z| < 1$ .

5. Hallar la serie de Laurent de  $f(z) = z^4 \operatorname{senh} \frac{1}{z}$  alrededor de  $z = 0$ , en  $0 < |z| < \infty$ .

6. Hallar la serie de Laurent de  $f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$  alrededor de  $z = 0$ , en  $0 < |z| < 1$  y en  $|z| > 1$ .

7. Clasificar las singularidades y determinar los residuos de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(z) = e^{z/(1-z)}$$

$$\text{b) } f(z) = \operatorname{tg}^2 z$$

$$\text{c) } f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

$$\text{d) } f(z) = \frac{1}{z - z^4}$$

$$\text{e) } f(z) = \frac{1}{z(e^{2z} - 1)}$$

$$\text{f) } f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z}{z}$$

$$\text{g) } f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$$

$$\text{h) } f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^3}$$

$$\text{i) } f(z) = \frac{z+1}{z^2 - iz + 2}$$

$$\text{j) } f(z) = \frac{1}{z \tanh z}$$

1. Utilizar el teorema de residuos para demostrar

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6} dx = \frac{2\pi}{3} \qquad \text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2(x^2+2x+2)} dx = \frac{13\pi}{50}$$

$$\text{c) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx = \frac{\pi}{3} \qquad \text{d) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2(x^2+2x+2)} dx = \frac{7\pi}{50}$$

2. Utilizar el teorema de residuos para demostrar

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x^n)^2} dx = \frac{\pi(n-a)}{n^2 \sin \frac{\pi a}{n}}; 0 < a < 2n \qquad \text{b) } \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^3} dx = \frac{\pi(a-2)(a-1)}{2 \sin \pi a}; 0 < a < 3$$

3. Utilizar el teorema de residuos para demostrar

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2 \sin \pi a} \left( 1 - \sin \frac{\pi a}{2} + \cos \frac{\pi a}{2} \right) \quad ; \quad 0 < a < 3$$

4. Utilizando cálculo de residuos, demostrar

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 + 3 \cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{18}$$

5. Utilizando cálculo de residuos, demostrar

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta - i \sin \theta} e^{3i\theta} d\theta = \frac{\pi}{3}$$

Ayuda: hacer el cambio de variables  $z = e^{i\theta}$

6. Demostrar

$$\text{a) V.P. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3-1} dx = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} \qquad \text{b) V.P. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x(x^2-6x+10)} dx = \frac{3\pi}{10}$$

7. Demostrar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{x^2 - 4x + 8} dx = \frac{\pi}{2} e^{-2\pi}$$

8. Utilizar cálculo de residuos para demostrar

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \qquad \text{b) } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\frac{1}{4})^2} = 2\pi^2 \qquad \text{c) } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{9n^2-1} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

1. Evaluar las integrales

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^8} x^4 dx \quad \text{b) } \int_0^{\pi/2} (\sec \theta)^{1/3} d\theta \quad \text{c) } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^6} x^6 dx \quad \text{d) } \int_0^{\pi/2} (\sen \theta)^{1/4} d\theta$$

Usar:  $\Gamma(\frac{1}{8}) = 7,5339$ ;  $\Gamma(\frac{5}{8}) = 1,4345$ ;  $\Gamma(\frac{1}{3}) = 2,6789$ ;  $\Gamma(\frac{1}{6}) = 5,5663$

2. Utilizar funciones  $\Gamma$  y  $B$  para probar que

$$\text{a) } \int_{-1}^1 x^6 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{5\pi}{128} \quad ; \quad \text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sen \theta)^4 d\theta = \frac{3\pi}{16} \quad ; \quad \text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tg \theta)^{-\frac{1}{3}} (\cos \theta)^2 d\theta = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

3. Demostrar que la función Digamma  $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$  satisface

$$\psi(1-z) = \psi(z) + \pi \operatorname{ctg} \pi z$$

4. Determinar el comportamiento asintótico ( $t \gg 1$ ) de las funciones modificadas de Bessel  $I_1(t)$  y  $K_0(t)$  a partir de la representaciones integrales

$$I_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{t \cos x} \cos x dx \quad ; \quad K_0(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t \cosh x} dx$$

Verificar que se cumplen las condiciones necesarias para aplicar el método del descenso rápido.

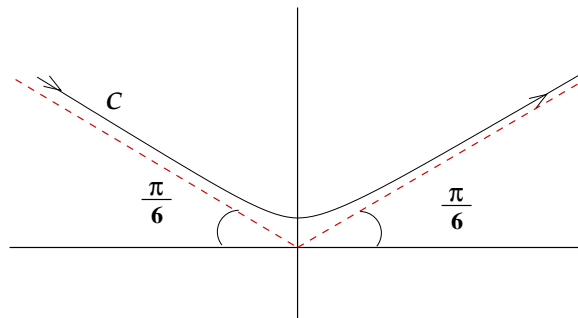
5. Dada la representación integral de la función de Airy

$$\operatorname{Ai}(t^{2/3}) = \frac{t^{1/3}}{2\pi} \int_c e^{it(z+\frac{z^3}{3})} dz$$

a) Verificar que se cumplen las condiciones necesarias para aplicar el método del descenso rápido en la aproximación de la integral cuando  $t \gg 1$ .

b) Probar que

$$\operatorname{Ai}(u) \simeq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} u^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}u^{3/2}} \quad , \quad u \gg 1$$



1. Hallar la solución general de:

a)  $y'' - \frac{2}{z^2}y = ze^z$  ; R:  $y(z) = c_1z^2 + \frac{c_2}{z} + \frac{e^z}{z}(z^2 - 2z + 2)$

b)  $y'' - \frac{3}{z}y' + \frac{4}{z^2}y = z$  ; R:  $y(z) = c_1z^2 + c_2z^2 \ln z + z^3$

2. Localizar y clasificar todos los puntos singulares (en  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ) de las ecuaciones diferenciales:

a)  $z^2(z-4)y'' + (z-4)y' + 2y = 0$  ; R:  $\text{psr}=\{4, \infty\}$  ,  $\text{psi}=\{0\}$

b)  $z^2(z^2+1)y'' + z(z^2+1)y' - y = 0$  ; R:  $\text{psr}=\{0, i, -i, \infty\}$  ,  $\text{psi}=\{\}$

c)  $z^4y'' + y = 0$  ; R:  $\text{psr}=\{\infty\}$  ,  $\text{psi}=\{0\}$

d)  $(z+1)y'' + 2zy' + 4y = 0$  ; R:  $\text{psr}=\{-1\}$  ,  $\text{psi}=\{\infty\}$

3. Dada la ecuación de Hermite:

$$y'' - 2zy' + 2\lambda y = 0$$

a) Clasificar los puntos singulares. R:  $\text{psr}=\{\}$  ,  $\text{psi}=\{\infty\}$

b) Hallar dos soluciones linealmente independientes alrededor de  $z = 0$ . Determinar el radio de convergencia.

c) Probar que para  $\lambda = m \in \mathbb{N}$ , una solución se convierte en un polinomio. Determinar estos polinomios cuando  $\lambda = 2, 3$ .

4. Hallar dos soluciones linealmente independientes alrededor de  $z = 0$  de la ecuación:

$$(9 + z^2)y'' - 2y = 0$$

Determinar el radio de convergencia. R:  $y_1 = \alpha_0(1 + \frac{z^2}{9})$ ,  $y_2 = 3\alpha_1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(4j^2 - 1)} \left(\frac{z}{3}\right)^{2j+1}$ ,  $R = 3$

5. Dada la ecuación de Laguerre:

$$zy'' + (1-z)y' + \lambda y = 0$$

a) Clasificar los puntos singulares. R:  $\text{psr}=\{0\}$  ,  $\text{psi}=\{\infty\}$

b) Utilizar el método de Fröbenius para hallar una solución alrededor de  $z = 0$ . Determinar el radio de convergencia.

c) Probar que para  $\lambda = m \in \mathbb{N}$ , la solución anterior se convierte en un polinomio. Determinar estos polinomios cuando  $\lambda = 1, 2$ .

d) Encontrar una segunda solución independiente cuando  $\lambda = 0$ . ¿ Es esta solución analítica en  $z = 0$  ? Ayuda:  $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$

1. Utilizar el método de Fröbenius para hallar dos soluciones linealmente independientes, alrededor de  $z = 0$ , de las ecuaciones:

$$\text{a) } z(z+2)y'' + (1+z)y' - y = 0, \quad \text{b) } z^2y'' + zy' - (z-1)y = 0, \quad \text{c) } 4z^2y'' - (z - \frac{3}{4})y = 0$$

2. Dadas las ecuaciones:

$$\text{a) } z(1+z)y'' - y' - 2y = 0, \quad \text{b) } zy'' + 2y' + \frac{1}{4}y = 0, \quad \text{c) } 4z^2y'' + 4zy' - zy = 0$$

utilizar el método de Fröbenius para hallar una solución  $y_1(z)$  alrededor de  $z = 0$ . Hallar una solución  $y_2(z)$  linealmente independiente de  $y_1(z)$ . ¿ Es  $y_2(z)$  analítica en  $z = 0$  ? Justifique su respuesta.

3. Demostrar que la solución general de la ecuación  $4z(z-1)y'' + (8z-2)y' + y = 0$ , alrededor de  $z_0 = 1$ , está dada por:

$$y = c_1 F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1-z\right) + c_2 (1-z)^{-1/2}.$$

4. Dada la ecuación:

$$4z(z-1)y'' - 2y' + y = 0,$$

encontrar dos soluciones linealmente independientes alrededor de  $z = 0$ . Determinar la solución analítica en  $z = 0$  y que satisface  $y(1) = 1$ . R:  $y_1 = F(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z)$ ,  $y_2 = z^{\frac{1}{2}}$ ,  $y = \frac{2}{\pi}y_1$

5. Probar que la ecuación  $zy'' - (1+z)y' - 3y = 0$  tiene una solución analítica en  $z_0 = 0$  dada por

$$y_1 = z^2 M(5, 3, z) = z^2 e^z \left(1 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{12}z^2\right).$$

¿ Es la segunda solución independiente analítica en  $z_0 = 0$  ? Justifique.

6. El período  $T$  de un péndulo simple (longitud  $\ell$ ) puede expresarse en términos de una integral elíptica según:

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - K^2 \text{sen}^2 \varphi}} \quad ; \quad K = \text{sen} \theta_M / 2,$$

donde  $\theta_M$  es el ángulo de máxima amplitud.

- a) Usando la representación integral de  $F(a, b, c, z)$  probar que

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, K^2\right).$$

- b) Probar entonces que

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{1}{16}\theta_M^2 + \dots\right).$$

1. Determinar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales alrededor de los puntos indicados. Hallar la región de convergencia de cada solución independiente. Indicar si la ecuación es directamente, o con un cambio de variable sencillo, de tipo Hipergeométrica, Hipergeométrica Confluyente o Bessel.

a)  $y'' - zy' + y = 0$  ;  $z_0 = 0$

b)  $z^4y'' + z(2z^2 - 1)y' + y = 0$  ;  $z_0 = \infty$

c)  $(2 - z^2)y'' + 2zy' - 2y = 0$  ;  $z_0 = 0$

d)  $2z^2y'' + 3zy' - y = 0$  ;  $z_0 = 0$

e)  $2(z - 4)y'' + (5 - z)y' - y = 0$  ;  $z_0 = 4$

f)  $2z(z - 1)y'' - y' - 4y = 0$  ;  $z_0 = 0, 1$

g)  $2z^2y'' - z(1 + 2z)y' + (1 + 4z)y = 0$  ;  $z_0 = 0$

h)  $z^2y'' - z(1 + z)y' + y = 0$  ;  $z_0 = 0$

i)  $zy'' + y' + zy = 0$  ;  $z_0 = 0$

j)  $zy'' + (1 - z)y' - y = 0$  ;  $z_0 = 0$

k)  $z(1 - z)y'' + (2 - z)y' + 4y = 0$  ;  $z_0 = 0, 1$

1. Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + e^{2z}y = 0$$

Ayuda: hacer el cambio de variable  $w = e^z$ . R:  $y = c_1 J_0(e^z) + c_2 N_0(e^z)$

2. Dada la ecuación

$$z^2 y'' + z y' + (z^2 - \frac{1}{4}) y = 0 ,$$

a) encontrar dos soluciones linealmente independientes alrededor de  $z = 0$ .

$$\text{R: } y = c_1 J_{\frac{1}{2}}(z) + c_2 N_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \{c_1 \sin z - c_2 \cos z\}$$

b) Determinar la solución que satisface  $y(\frac{\pi}{4}) = 0$ ,  $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ . R:  $y = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \{\sin z - \cos z\}$

3. Dada la ecuación

$$z y'' - (2\alpha - 1) y' + z y = 0 ,$$

a) probar que  $y(z) = z^\alpha N_\alpha(z)$  es solución.

b) Hallar la solución general de la ecuación  $z y'' + 7 y' + z y = 0$ .

$$\text{R: } y = c_1 \frac{J_3(z)}{z^3} + c_2 \frac{N_3(z)}{z^3}$$

4. Dada la ecuación

$$z y'' - y' - z y = 0$$

a) Encontrar dos soluciones linealmente independientes alrededor de  $z = 0$ .

Ayuda: hacer la transformación  $y(z) = z u(z)$ . R:  $c_1 z I_1(z) + c_2 z K_1(z)$

b) Determinar la solución que satisface las condiciones  $y(1) = 1$  y  $y(z)$  acotada cuando  $z \rightarrow \infty$ .

$$\text{R: } z K_1(z)/K_1(1), \quad K_1(1) = 0,6019$$

5. Encontrar la solución de la ecuación inhomogénea

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{(x^2 + 4)}{x^2} y = x^2$$

con condiciones de borde  $y(0) = 0$  y  $y(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ .

Ayuda: Usar la fórmula de Abel y el límite  $x \rightarrow 0$  de  $I_\nu(x)$ ,  $K_\nu(x)$ , para demostrar que  $W[K_\nu, I_\nu] = 1/x$ . R:  $y = -x^3 \{I_3(x)K_2(x) + K_3(x)I_2(x)\}$

6. Probar que:

$$\text{a) } \int J_0(x) \sin x \, dx = x J_0(x) \sin x - x J_1(x) \cos x + c$$

$$\text{b) } \int x^5 J_2(x) \, dx = 6x^2(8 - x^2) J_0(x) - x(x^4 - 24x^2 + 96) J_1(x) + c$$



1. Demostrar la relación de recurrencia:

$$(2n + 1) x P_n(x) = (n + 1) P_{n+1}(x) + n P_{n-1}(x)$$

Ayuda: Utilizar  $(1 - 2xt + t^2) \frac{\partial g}{\partial t} = (x - t)g$ .

2. Demostrar:

$$\int_0^1 P_\ell(x) dx = \frac{P_{\ell-1}(0)}{\ell + 1} = \begin{cases} 0 & , \ell = 2n \\ \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n+1} (n + 1)! n!} & , \ell = 2n + 1 \end{cases}$$

Ayuda: Usar relaciones de recurrencia y propiedades de  $P_\ell(x)$ .

3. Evaluar las integrales:

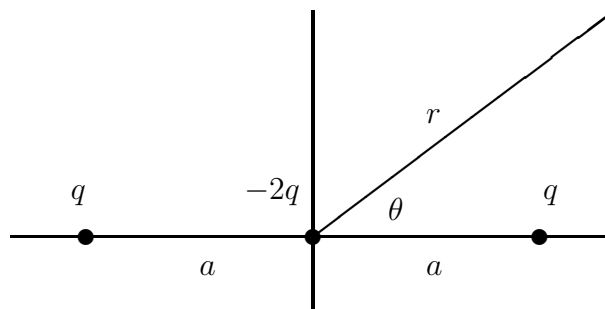
$$\text{a) } \int_{-1}^1 x^2 P_\ell(x) dx \quad ; \quad \text{b) } \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \cos \varphi Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

$$\text{R: a) } \frac{2}{3} \delta_{\ell,0} + \frac{4}{15} \delta_{\ell,2}, \quad \text{b) } \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \delta_{\ell,1} (\delta_{m,-1} - \delta_{m,1})$$

4. Probar que el potencial eléctrico producido por el cuadrupolo de la figura a una distancia  $r$  del origen ( $r > a$ ), está dado por

$$V(r) = \frac{2q}{r} \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^{2n}$$

Probar que para  $r \gg a$ ,  $V(r) \simeq \frac{qa^2}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$ .



1. Demostrar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \left[ (n+2)(n+1)\delta_{m,n+2} + (n+\frac{1}{2})\delta_{m,n} + \frac{1}{4}\delta_{m,n-2} \right]$$

2. Dada la ecuación de Laguerre:  $x y'' + (1-x) y' + n y = 0$ , probar que:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = c_n \delta_{m,n}$$

Utilizando la función generadora de los  $L_n(x)$  demostrar que  $c_n = 1$ .

3. Evaluar las integrales:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^3 H_n(x) dx \quad ; \quad \text{b) } \int_0^{\infty} e^{-x} x^3 L_5(x) dx$$

$$\text{R: } \text{a) } \sqrt{\pi} \left( \frac{3}{2}\delta_{n,1} + 6\delta_{n,3} \right), \quad \text{b) } 0$$

4. Demostrar que los polinomios asociados de Laguerre satisfacen:

$$\text{a) } L_0^k(x) = 1 \quad ; \quad \text{b) } L_1^k(x) = (k+1) - x$$

1. Encontrar los autovalores y autovectores del problema de Sturm-Liouville

$$y'' = \lambda y \quad ; \quad y'(0) = 0 \quad ; \quad y(L) = 0$$

$$\text{R: } \lambda_n = -\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4L^2}, \quad y_n(x) = \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

2. Encontrar los autovalores y autovectores del problema de Sturm-Liouville

$$y'' = \lambda y \quad ; \quad y'(0) = 0 \quad ; \quad y'(L) = 0$$

$$\text{R: } \lambda_n = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad y_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{notar que } y_0 = 1 \text{ es autofunción con autovalor } \lambda_0 = 0.)$$

3. Encontrar el desarrollo en serie de Legendre de la función

$$f(x) = \begin{cases} a & , \quad -1 < x < 0 \\ b & , \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\text{R: } f(x) = \frac{1}{2}(b+a) + \frac{1}{4}(b-a) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (4j+3) (2j)!}{2^{2j} (j+1)! j!} P_{2j+1}(x)$$

4. Encontrar el desarrollo en serie de  $f(x) = x^3$ ,  $x \in [0, 1]$ , usando como base el conjunto  $\{J_1(\gamma_{1k}x)\}$ , con  $J_1(\gamma_{1k}) = 0$ .

$$\text{R: } x^3 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\gamma_{1k}^2 - 8)}{\gamma_{1k}^3 J_2(\gamma_{1k})} J_1(\gamma_{1k}x)$$

5. Demostrar que

$$1 - x^2 = 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_{0k}x)}{\gamma_{0k}^3 J_1(\gamma_{0k})}$$

para  $x \in [0, 1]$ .

6. Encontrar el desarrollo en serie de  $f(x) = x^m$ ,  $m \geq 1$ ,  $x \in [0, 1]$ , usando como base el conjunto  $\{J_m(\delta_{mk}x)\}$ , con  $J'_m(\delta_{mk}) = 0$ .

$$\text{R: } x^m = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{mk} J_{m+1}(\delta_{mk})}{(\delta_{mk}^2 - m^2) [J_m(\delta_{mk})]^2} J_m(\delta_{mk}x)$$

1. Dos esferas concéntricas de radios  $a$  y  $b$  ( $b > a$ ) se mantienen a potenciales dados por

$$V|_{r=a} = V_0 \sin \theta \cos \varphi \quad ; \quad V|_{r=b} = V_0 \cos^2 \theta$$

Determinar el potencial para todo  $r$ .  $V$  satisface la ecuación de Laplace  $\nabla^2 V = 0$ .

2. Encontrar la solución  $\psi(t, \rho, \varphi)$  de la ecuación de difusión

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}$$

( $\alpha$  constante) en el interior de un disco de radio  $a$  con condición de frontera y condición inicial dadas por

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho}(t, a, \varphi) = 0 \quad ; \quad \psi(0, \rho, \varphi) = \rho^2$$

3. Hallar la solución  $\psi(t, x, y)$  de la ecuación de ondas

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

en una membrana rectangular ( $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ), con condiciones de frontera

$$\psi(t, 0, y) = 0 \quad ; \quad \psi(t, a, y) = 0 \quad ; \quad \psi(t, x, 0) = 0 \quad ; \quad \psi(t, x, b) = 0$$

y condiciones iniciales

$$\psi(0, x, y) = xy(a-x)(b-y) \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(0, x, y) = 0$$

4. Encontrar la solución  $\psi(t, \rho, \varphi)$  de la ecuación de difusión

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}$$

( $\alpha$  constante) en el interior del cuarto de disco definido por:  $0 \leq \rho \leq a$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , con condiciones de frontera

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho}(t, a, \varphi) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}(t, \rho, 0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}(t, \rho, \frac{\pi}{2}) = 0$$

y condición inicial

$$\psi(0, \rho, \varphi) = 1 + \rho^2 \cos 2\varphi$$

5. Encontrar la solución  $\psi(t, \rho, \varphi, z)$  de la ecuación de ondas

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

( $v$  constante) en el interior de un cilindro de radio  $a$  y altura  $L$  ( $0 \leq \rho \leq a$ ,  $0 \leq z \leq L$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ), con condiciones de frontera

$$\psi(t, a, \varphi, z) = 0 \quad ; \quad \psi(t, \rho, \varphi, 0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial z}(t, \rho, \varphi, L) = 0$$

y condiciones iniciales

$$\psi(0, \rho, \varphi, z) = \beta \text{ (constante)} \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(0, \rho, \varphi, z) = 0$$

6. El potencial en la superficie de un conductor esférico de radio  $a$  está dado por

$$V|_{r=a} \begin{cases} V_o & , \quad 0 \leq \theta < \alpha \\ 0 & , \quad \alpha < \theta \leq \pi \end{cases}$$

Hallar el potencial que satisface  $\nabla^2 V = 0$  en el interior y el exterior del conductor.

7. Un cubo de lado  $b$  se mantiene a temperatura constante  $T_o$  en las paredes  $z = 0$  y  $z = b$ , mientras que las paredes restantes se mantienen a temperatura cero. Hallar la temperatura de equilibrio ( $\nabla^2 T = 0$ ) en el interior del cubo.

8. Una partícula encerrada en una esfera de radio  $a$  satisface la ecuación de Schrödinger

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0 \quad , \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

junto con la condición

$$\Psi|_{r=a} = 0$$

Probar que la energía mínima necesaria para obtener una solución no-trivial es

$$E_{min} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

Respuestas

1)

$$r < a \quad , \quad V = V_0 \left( \frac{r}{a} \right) \text{sen } \theta \cos \varphi$$

$$a < r < b \quad , \quad V = \frac{1}{3} V_0 \left[ \left( \frac{b}{r} \right) \left( \frac{r-a}{b-a} \right) + 3 \left( \frac{a}{r} \right)^2 \left( \frac{b^3 - r^3}{b^3 - a^3} \right) \text{sen } \theta \cos \varphi \right. \\ \left. + \left( \frac{b}{r} \right)^3 \left( \frac{r^5 - a^5}{b^5 - a^5} \right) (3 \cos^2 \theta - 1) \right]$$

$$r > b \quad , \quad V = \frac{1}{3} V_0 \left( \frac{b}{r} \right) \left[ 1 + \left( \frac{b}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \right]$$

2)

$$\psi(t, \rho, \varphi) = \psi(t, \rho) = \frac{a^2}{2} + 4a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha \delta_{0k}^2 t / a^2}}{\delta_{0k}^2 J_0(\delta_{0k})} J_0\left(\frac{\delta_{0k} \rho}{a}\right)$$

3)

$$\psi(t, x, y) = \frac{64a^2 b^2}{\pi^6} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \omega_{jk} t}{(2j+1)^3 (2k+1)^3} \text{sen } \frac{(2j+1)\pi x}{a} \text{sen } \frac{(2k+1)\pi y}{b}$$

$$\omega_{jk} = v\pi \sqrt{\frac{(2j+1)^2}{a^2} + \frac{(2k+1)^2}{b^2}}$$

4)

$$\psi(t, \rho, \varphi) = 1 + 4a^2 \cos 2\varphi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha \delta_{2k}^2 t / a^2}}{(\delta_{2k}^2 - 4) J_2(\delta_{2k})} J_2\left(\frac{\delta_{2k} \rho}{a}\right)$$

5)

$$\psi(t, \rho, \varphi, z) = a^2 \text{sen } \frac{3\pi z}{L} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\gamma_{0k}^2 - 4) e^{-\alpha \nu_{0k} t}}{\gamma_{0k}^3 J_1(\gamma_{0k})} J_0\left(\frac{\gamma_{0k} \rho}{a}\right) + \cos 2\varphi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha \nu_{2k} t}}{\gamma_{2k} J_3(\gamma_{2k})} J_2\left(\frac{\gamma_{2k} \rho}{a}\right) \right\}$$

$$\nu_{mk} = \frac{\gamma_{mk}^2}{a^2} + \frac{9\pi^2}{L^2}$$

6)

$$\psi(t, \rho, \varphi, z) = \psi(t, \rho, z) = \frac{8\beta}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \omega_{nk} t}{(2n+1) \gamma_{0k} J_0'(\gamma_{0k})} \text{sen } \frac{(2n+1)\pi z}{2L} J_0\left(\frac{\gamma_{0k} \rho}{a}\right)$$

$$\omega_{nk}^2 = \frac{\gamma_{0k}^2}{a^2} + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4L^2}$$

7)

$$r < a \quad , \quad V = \frac{V_0}{2}(1 - \cos \alpha) + \frac{V_0}{2} \sum_{\ell=1}^{\infty} [P_{\ell-1}(\cos \alpha) - P_{\ell+1}(\cos \alpha)] \left(\frac{r}{a}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$r > a \quad , \quad V = \frac{V_0}{2}(1 - \cos \alpha) \left(\frac{a}{r}\right) + \frac{V_0}{2} \sum_{\ell=1}^{\infty} [P_{\ell-1}(\cos \alpha) - P_{\ell+1}(\cos \alpha)] \left(\frac{a}{r}\right)^{\ell+1} P_{\ell}(\cos \theta)$$

8)

$$T(x, y, z) = \frac{16T_0}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{(2j+1)\pi x}{b} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi y}{b}}{(2j+1)(2k+1) \operatorname{senh} b\nu_{jk}} [\operatorname{senh} \nu_{jk} z + \operatorname{senh} \nu_{jk}(b-z)]$$

$$\nu_{jk} = \frac{\pi}{b} \sqrt{(2j+1)^2 + (2k+1)^2}$$