Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 1 **11-02-2010**

1. Graficar las regiones determinadas por las desigualdades:

   a) $|2z + 1 + 2i| < 3$; b) $|z| \leq |z - i|$

   R: a) interior de disco de radio $\frac{3}{2}$ y centro en $z_0 = -\frac{1}{2} - i$, ; b) $-\infty < x < \infty$, $y \leq \frac{1}{2}$

2. Utilizar $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha$ para demostrar que $\mathrm{sen}4\theta = 4\cos\theta\mathrm{sen}\theta\big(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta\big)$.

3. Resolver,

   a) $z^5 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$ b) $z^4 + iz^2 + 2 = 0$

   R: a) $z_k = e^{\frac{i(12k+1)\pi}{30}}$, $k = 0, \cdots, 4$; b) $z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$, $z_2 = e^{\frac{5i\pi}{4}}$, $z_3 = \sqrt{2}\,e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $z_4 = \sqrt{2}\,e^{\frac{7i\pi}{4}}$

4. Utilizando las definiciones de las funciones trigonométricas e hiperbólicas, probar

   a) $\mathrm{arc\ ctgh}\ z = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$

   b) $|\mathrm{sen}\,z|^2 = \mathrm{sen}^2 x + \mathrm{senh}^2 y \qquad (z = x + iy)$

5. Demostrar que $e^{\bar{z}}$ no es diferenciable.

6. Determinar si $u(x, y)$ puede ser la parte real de una función analítica, y en ese caso determinar la función conjugada $v(x, y)$ tal que $f = u + iv$ sea analítica.

   a) $u(x, y) = e^{x^2-y^2}\cos 2xy$; b) $u(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$; $u(x, y) = x^2 + y^3$

   R: a) $v(x, y) = e^{x^2-y^2}\,\mathrm{sen}\,2xy + c$, $f = e^{z^2} + ic$; b) $v(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + c$, $f = \dfrac{i}{z} + ic$
   ($c \in \mathbb{R}$ constante , $z = x + iy$)

7. Evaluar las siguientes expresiones en la hoja $-\pi \leq \theta < \pi$:

   a) $(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2})^{1+i}$; b) $(-5i)^i$

   R: a) $-e^{\frac{2\pi}{3}}(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2})$; b) $e^{\frac{\pi}{2}}\big[\cos(\ln 5) + i\mathrm{sen}(\ln 5)\big]$

8. Dada la transformación $w = z + \dfrac{1}{z}$, hallar la imagen de todos los puntos con $|z| = 1$ e $\mathrm{Im}\,z > 0$.
   R: $\mathrm{Im}\,w = 0$, $-2 < \mathrm{Re}\,w < 2$

9. Dada la función $f(z) = (z + 2i)^{1/3}$,

   a) hallar los puntos de ramificación en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. R: $-2i$, ∞

   b) determinar cortes de rama tal que $f(z)$ sea univaluada. R: $z + 2i = re^{i\theta}$, $\alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi$

   c) describir la superficie de Riemann asociada a $f(z)$.
   R: consiste de tres hojas, es topológicamente equivalente a una esfera.

   Repetir para $f(z) = \sqrt{z^4 + 1}$.

Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 2 **23-02-2010**

1. Evaluar las integrales
$$\text{a)} \int_\gamma \overline{z}\, dz \quad ; \quad \text{b)} \int_\gamma z\, dz$$
para $\gamma(t) = 2\, e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. R: a) $8i\pi$, b) 0

2. Evaluar la integral
$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$$
donde γ es la curva $\gamma(t) = 2\cos t + 3i \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 6\pi]$. R: $6i\pi$

3. Evaluar las integrales:
$$\text{a)} \int_\gamma \frac{z}{\cosh z}\, dz \quad ; \quad \text{b)} \int_\gamma \operatorname{ctg} z\, dz \quad ; \quad \text{c)} \int_\gamma \frac{dz}{(z^2+4)^2}$$
para las curvas dadas por $\gamma(t) = 4\, e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ y $\gamma(t) = 2i + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
R: a) $2i\pi^2$, $i\pi^2$; b) $6i\pi$, 0 ; c) 0, $\frac{\pi}{16}$

4. Hallar los primeros cuatro términos de la serie de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$ alrededor de $z = 0$, en $0 < |z| < 1$. R: $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{z}{12} - \dfrac{z^3}{720} + \cdots$

5. Hallar la serie de Laurent de $f(z) = z^4\, e^{1/z}$ alrededor de $z = 0$, en $0 < |z| < \infty$. R: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{4-k}}{k!}$

6. Hallar la serie de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z(1+z^2)}$ alrededor de $z = 0$, en: a) $0 < |z| < 1$, b) $|z| > 1$.
R: a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, z^{2k-1}$; b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{2k+3}}$

7. Clasificar las singularidades en $\mathbb{C}$, y determinar los respectivos residuos, de las siguientes funciones:

   a) $f(z) = e^{z/(z-1)}$ b) $f(z) = \operatorname{tg}^2 z$

   c) $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ d) $f(z) = \dfrac{1}{z - z^4}$

   e) $f(z) = \dfrac{1}{z(e^{2z} - 1)}$ f) $f(z) = \dfrac{\operatorname{ctg} z}{z}$

   g) $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2}$ h) $f(z) = \dfrac{e^z - 1 - z}{z^3}$

   i) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2 - iz + 2}$ j) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 \tanh z}$

   k) $f(z) = z^3 \cos \dfrac{1}{z}$ l) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^4}$

Respuestas ($n \in \mathbb{Z}$)

a) $z = 1$, singularidad esencial, $\text{Res}(f, 1) = e$.

b) $z_n = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, polos dobles, $\text{Res}(f, z_n) = 0$.

c) $z = 0$, sing. removible. $z_n = 2in\pi$, $n \neq 0$, polos simples, $\text{Res}(f, z_n) = 2in\pi$.

d) $z = 0$, polo simple, $\text{Res}(f, 0) = 1$. $z_k = e^{2i\pi k/3}$, $k = 0, 1, 2$, polos simples, $\text{Res}(f, z_k) = -\frac{1}{3}$.

e) $z = 0$, polo doble, $\text{Res}(f, 0) = -\frac{1}{2}$. $z_n = in\pi$, $n \neq 0$, polos simples, $\text{Res}(f, z_n) = -\frac{i}{2n\pi}$.

f) $z = 0$, polo doble, $\text{Res}(f, 0) = 0$. $z_n = n\pi$, $n \neq 0$, polos simples, $\text{Res}(f, z_n) = \frac{1}{n\pi}$.

g) $z = \pm i$, polos dobles, $\text{Res}(f, \pm i) = \mp\frac{i}{4}$.

h) $z = 0$, polo simple, $\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{2}$.

i) $z = -i$, polo simple, $\text{Res}(f, -i) = \frac{1}{3}(1 + i)$. $z = 2i$, polo simple, $\text{Res}(f, 2i) = \frac{1}{3}(2 - i)$.

j) $z = 0$, polo triple, $\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{3}$. $z_n = in\pi$, $n \neq 0$, polos simples, $\text{Res}(f, z_n) = -\frac{1}{n^2\pi^2}$.

k) $z = 0$, singularidad esencial, $\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{24}$.

l) $z = 0$, polo triple, $\text{Res}(f, 0) = -\frac{1}{6}$.

Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 3 **02-03-2010**

1. Utilizar el teorema de residuos para demostrar

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^6}\,dx \;=\; \frac{2\pi}{3}$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2(x^2+2x+2)}\,dx \;=\; \frac{13\pi}{50}$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^6}\,dx \;=\; \frac{\pi}{3}$ d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2(x^2+2x+2)}\,dx \;=\; \frac{7\pi}{50}$

2. Utilizar el teorema de residuos para demostrar

a) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{(1+x^n)^2}\,dx \;=\; \frac{\pi\,(n-a)}{n^2\,\mathrm{sen}\frac{\pi a}{n}}\;;\;0<a<2n$ b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{(1+x)^3}\,dx \;=\; \frac{\pi\,(a-2)(a-1)}{2\,\mathrm{sen}\,\pi a}\;;\;0<a<3$

3. Utilizar el teorema de residuos para demostrar

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{(1+x)(1+x^2)}\,dx \;=\; \frac{\pi}{2\,\mathrm{sen}\,\pi a}\left(1-\mathrm{sen}\frac{\pi a}{2}+\cos\frac{\pi a}{2}\right)\quad;\quad 0<a<3$$

4. Utilizando cálculo de residuos, demostrar

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{5+3\,\cos\theta}\,d\theta \;=\; \frac{\pi}{18}$$

5. Utilizando cálculo de residuos, demostrar

$$\int_{0}^{2\pi} e^{\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta}\,e^{3i\theta}\,d\theta \;=\; \frac{\pi}{3}$$

`Ayuda: hacer el cambio de variables` $z=e^{i\theta}$

6. Demostrar

a) V.P. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^3-1}\,dx \;=\; -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ b) V.P. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x(x^2-6x+10)}\,dx \;=\; \frac{3\pi}{10}$

7. Demostrar

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\pi x}{x^2-4x+8}\,dx \;=\; \frac{\pi}{2}\,e^{-2\pi}$$

8. Utilizar cálculo de residuos para demostrar

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \;=\; \frac{\pi^3}{32}$ b) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+\frac{1}{4})^2} \;=\; 2\pi^2$ c) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{9n^2-1} \;=\; -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 4 **09-03-2010**

1. Evaluar las integrales

$$\text{a)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^8}\, x^4\, dx \qquad \text{b)}\int_0^{\pi/2} (\sec\theta)^{1/3} d\theta \qquad \text{c)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^6}\, x^6\, dx \qquad \text{d)}\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}\theta)^{1/4} d\theta$$

`Usar:` $\Gamma(\frac{1}{8}) = 7,5339$; $\Gamma(\frac{5}{8}) = 1,4345$; $\Gamma(\frac{1}{3}) = 2,6789$; $\Gamma(\frac{1}{6}) = 5,5663$

R: a) $\frac{1}{4}\Gamma(\frac{5}{8})$, b) $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{1}{6})$, c) $\frac{1}{18}\Gamma(\frac{1}{6})$, d) $4\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{5}{8})/\Gamma(\frac{1}{8})$

2. Utilizar funciones Γ y B para probar que

$$\text{a)} \int_{-1}^{1} x^6\sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{5\pi}{128} \quad ; \quad \text{b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}\theta)^4\, d\theta = \frac{3\pi}{16} \quad ; \quad \text{c)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg}\theta)^{-\frac{1}{3}}\, (\cos\theta)^2\, d\theta = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

3. Demostrar que la función Digamma $\psi(z) = \dfrac{d}{dz}\ln\Gamma(z)$ satisface

$$\psi(1-z) = \psi(z) + \pi \operatorname{ctg} \pi z$$

4. A partir de las representaciones integrales de la función modificada de Bessel $K_n(t)$:

$$K_n(t) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{2}(x+\frac{1}{x})}\, x^{-n-1}\, dx \qquad ; \qquad K_n(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\cosh x}\, \cosh nx\, dx$$

demostrar que $K_n(t) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2t}}\, e^{-t}$ para $t \gg 1$. Verificar que se cumplen las condiciones necesarias para aplicar el método del descenso rápido.

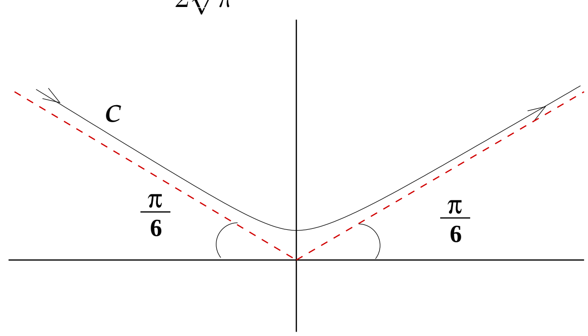
5. Dada la representación integral de la función de Airy

$$\operatorname{Ai}(t^{2/3}) = \frac{t^{1/3}}{2\pi}\int_{\mathcal{C}} e^{it(z+\frac{z^3}{3})}\, dz$$

a) Verificar que se cumplen las condiciones necesarias para aplicar el método del descenso rápido en la aproximación de la integral cuando $t \gg 1$.

b) Probar que

$$\operatorname{Ai}(u) \simeq \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, u^{-1/4}\, e^{-\frac{2}{3}u^{3/2}} \qquad , \qquad u \gg 1$$



Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 5 **22-03-2010**

1. Hallar la solución general de:

   a) $y'' - \frac{2}{z^2}\,y = ze^z$; R: $y(z) = c_1 z^2 + \dfrac{c_2}{z} + \dfrac{e^z}{z}(z^2 - 2z + 2)$

   b) $y'' - \frac{3}{z}\,y' + \frac{4}{z^2}\,y = z$; R: $y(z) = c_1 z^2 + c_2\, z^2 \ln z + z^3$

2. Localizar y clasificar todos los puntos singulares (en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) de las ecuaciones diferenciales:

   a) $z^2(z-4)y'' + (z-4)y' + 2y = 0$; R: psr=$\{4,\infty\}$, psi=$\{0\}$

   b) $z^2(z^2+1)y'' + z(z^2+1)y' - y = 0$; R: psr=$\{0,\, i,\, -i,\, \infty\}$, psi=$\{\}$

   c) $z^4 y'' + y = 0$; R: psr=$\{\infty\}$, psi=$\{0\}$

   d) $(z+1)y'' + 2zy' + 4y = 0$; R: psr=$\{-1\}$, psi=$\{\infty\}$

3. Dada la ecuación de Hermite:
$$y'' - 2zy' + 2\lambda y = 0$$

   a) Clasificar los puntos singulares. R: psr=$\{\}$, psi=$\{\infty\}$

   b) Hallar dos soluciones linealmente independientes alrededor de $z = 0$. Determinar el radio de convergencia.

   c) Probar que para $\lambda = m \in \mathbb{N}$, una solución se convierte en un polinomio. Determinar estos polinomios cuando $\lambda = 2, 3$. R: $H_2 = \alpha_0(1 - 2z^2)$, $H_3 = \alpha_1(z - \frac{2}{3}z^3)$

4. Hallar dos soluciones linealmente independientes alrededor de $z = 0$ de la ecuación:
$$(9 + z^2)\, y'' - 2y = 0$$
   Determinar el radio de convergencia. R: $y_1 = \alpha_0(1 + \frac{z^2}{9})$, $y_2 = 3\alpha_1 \sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{j+1}}{(4j^2-1)} \left(\dfrac{z}{3}\right)^{2j+1}$, $R = 3$

5. Dada la ecuación de Laguerre:
$$zy'' + (1 - z)y' + \lambda y = 0$$

   a) Clasificar los puntos singulares. R: psr=$\{0\}$, psi=$\{\infty\}$

   b) Utilizar el método de Fröbenius para hallar una solución alrededor de $z = 0$. Determinar el radio de convergencia.

   c) Probar que para $\lambda = m \in \mathbb{N}$, la solución anterior se convierte en un polinomio. Determinar estos polinomios cuando $\lambda = 1, 2$. R: $L_1 = \alpha_0(1 - z)$, $L_2 = \alpha_0(1 - 2z + \frac{1}{2}z^2)$

   d) Encontrar una segunda solución independiente cuando $\lambda = 0$. ¿ Es esta solución analítica en $z = 0$? (`Ayuda:` $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots$) R: $y_2 = \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n\,n!}$, singular en $z = 0$

1. Utilizar el método de Fröbenius para hallar dos soluciones linealmente independientes, alrededor de $z = 0$, de las ecuaciones:

$$\text{a) } z(z+2)y'' + (1+z)y' - y = 0\ , \quad \text{b) } z^2y'' + zy' - (z-1)y = 0\ , \quad \text{c) } 4z^2y'' - (z - \tfrac{3}{4})y = 0$$

R: a) $y_1 = \dfrac{z^{1/2}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k\,\Gamma(k-\frac{1}{2})\,z^k}{2^k\,k!} = z^{1/2}\left(1+\dfrac{z}{2}\right)^{1/2} = z^{1/2}\left(1+\dfrac{z}{4}-\dfrac{z^2}{32}+\cdots\right)$; $y_2 = 1+z$

b) $y_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\Gamma(1+2i)\,z^{k+i}}{\Gamma(k+1+2i)\,k!} = z^i\left(1+\dfrac{(1-2i)}{4}z-\dfrac{(1+3i)}{40}z^2+\cdots\right)$

$y_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\Gamma(1-2i)\,z^{k-i}}{\Gamma(k+1-2i)\,k!} = z^{-i}\left(1+\dfrac{(1+2i)}{4}z-\dfrac{(1-3i)}{40}z^2+\cdots\right)$

c) $y_1 = z^{3/4}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{(2k+1)!} = z^{1/4}\text{senh}\sqrt{z} = z^{3/4}\left(1+\dfrac{z}{6}+\dfrac{z^2}{120}+\cdots\right)$

$y_2 = z^{1/4}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{(2k)!} = z^{1/4}\cosh\sqrt{z} = z^{1/4}\left(1+\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{24}+\cdots\right)$

2. Dadas las ecuaciones:

$$\text{a) } z(1+z)y'' - y' - 2y = 0\ , \quad \text{b) } zy'' + 2y' + \tfrac{1}{4}y = 0\ \ , \quad \text{c) } 4z^2y'' + 4zy' - zy = 0$$

utilizar el método de Fröbenius para hallar una solución $y_1(z)$ alrededor de $z = 0$. Hallar una solución $y_2(z)$ linealmente independiente de $y_1(z)$. ¿ Es $y_2(z)$ analítica en $z = 0$? Justifique su respuesta.

R: a) $y_1 = z^2$; $y_2 = y_1\ln z + \left[-\frac{1}{2} + z - z^2\ln(1+z)\right] = z^2\ln z + \left(-\frac{1}{2} + z - z^3 + \frac{1}{2}z^4 + \cdots\right)$

b) $y_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k\,z^k}{2^{2k}\,(k+1)!\,k!} = 1 - \dfrac{z}{8} + \dfrac{z^2}{192} - \dfrac{z^3}{9216} + \cdots$

$y_2 = \frac{1}{4}y_1\ln z + z^{-1}\left(-1 + \dfrac{z}{8} + \dfrac{z^2}{32} - \dfrac{11z^3}{4608} + \cdots\right)$

c) $y_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{2^{2k}\,(k!)^2} = 1 + \dfrac{z}{4} + \dfrac{z^2}{64} + \dfrac{z^3}{2304} + \cdots$

$y_2 = y_1\ln z - \left(\dfrac{z}{2} + \dfrac{3z^2}{64} + \dfrac{11z^3}{6912} + \cdots\right)$

En los tres casos y_2 no es analítica en $z = 0$ porque $\ln z$ tiene un punto de ramificación en $z = 0$.

3. Demostrar que la solución general de la ecuación $4z(z-1)y'' + (8z-2)y' + y = 0$, alrededor de $z_0 = 1$, está dada por:

$$y = c_1\,F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},1-z) + c_2\,(1-z)^{-1/2}.$$

4. Dada la la ecuación:
$$4z(z-1)\,y'' - 2\,y' + \,y = 0,$$
encontrar dos soluciones linealmente independientes alrededor de $z=0$. Determinar la solución analítica en $z=0$ y que satisface $y(1)=1$. R: $y_1 = F(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z)$, $\quad y_2 = z^{\frac{1}{2}}$, $\quad y = \frac{2}{\pi} y_1$

5. Probar que la ecuación $zy'' - (1+z)y' - 3y = 0$ tiene una solución analítica en $z_0 = 0$ dada por
$$y_1 = z^2 M(5,3,z) = z^2 e^z (1 + \frac{2}{3} z + \frac{1}{12} z^2).$$
¿ Es la segunda solución independiente analítica en $z_0 = 0$? Justifique.

6. El período T de un péndulo simple (longitud ℓ) puede expresarse en términos de una integral elíptica según:
$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - K^2 \text{sen}^2\varphi}} \qquad ; \qquad K = \text{sen}\theta_M/2,$$
donde θ_M es el ángulo de máxima amplitud.

   a) Usando la representación integral de $F(a,b,c,z)$ probar que $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\, F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, K^2)$.

   b) Probar entonces que $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,(1 + \frac{1}{16}\theta_M^2 + \cdots)$.

Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 7 **15-04-2010**

1. Determinar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales alrededor de los puntos indicados. Hallar la región de convergencia de cada solución independiente. Indicar si la ecuación es directamente, o con un cambio de variable sencillo, de tipo Hipergeométrica, Hipergeométrica Confluente o Bessel.

   a) $2z(z-1)y'' + (5z-1)y' + y = 0 \quad ; \qquad z_0 = \infty$

   b) $z^4 y'' + z(2z^2-1)y' + y = 0 \quad ; \qquad z_0 = \infty$

   c) $(2-z^2)y'' + 2zy' - 2y = 0 \quad ; \qquad z_0 = 0$

   d) $2z^2 y'' + 3zy' - y = 0 \quad ; \qquad z_0 = 0$

   e) $2(z-4)y'' + (5-z)y' - y = 0 \quad ; \qquad z_0 = 4$

   f) $2z(z-1)y'' - y' - 4y = 0 \quad ; \qquad z_0 = 1$

   g) $2z^2 y'' - z(1+2z)y' + (1+4z)y = 0 \quad ; \qquad z_0 = 0$

   h) $z^2 y'' - z(1+z)y' + y = 0 \quad ; \qquad z_0 = 0$

   i) $36z^2 y'' + 12zy' + (9z+4)y = 0 \quad ; \qquad z_0 = 0$

   j) $z^2 y'' + 2zy' + z^2 y = 0 \quad ; \qquad z_0 = 0$

   k) $z^2 y'' + 5zy' + (z^2+3)y = 0 \quad ; \qquad z_0 = 0$

Respuestas

a) $y_1 = \xi^{\frac{1}{2}} F(\frac{1}{2}, 1; \frac{1}{2}; \xi) = \xi^{\frac{1}{2}}(1-\xi)^{-1} \quad ; \quad y_2 = \xi F(1, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \xi) = \xi(1-\xi)^{-1} \quad ; \quad \xi = \dfrac{1}{z}$

b) $y_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{2^k k!} = e^{-\xi^2/2} \quad ; \quad y_2 = \Gamma(\tfrac{3}{2}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k+1}}{2^k \Gamma(k+\frac{3}{2})} \quad ; \quad \xi = \frac{1}{z}$

c) $y_1 = 1 + \frac{1}{2}z^2 \quad ; \quad y_2 = z$

d) $y_1 = z^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad y_2 = \dfrac{1}{z}$

e) $y_1 = M(1, \frac{1}{2}; u) \quad ; \quad y_2 = u^{\frac{1}{2}} M(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; u) = u^{\frac{1}{2}} e^u \quad ; \quad u = \dfrac{z-4}{2}$

f) $y_1 = F(1, -2; -\frac{1}{2}; 1-z) = 1 + 4(1-z) - 8(1-z)^2$
$y_2 = (1-z)^{\frac{3}{2}} F(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; 1-z) = (1-z)^{\frac{3}{2}}[1-(1-z)]^{1/2}$

g) $y_1 = zM(-1, \frac{3}{2}; z) = z(1 - \frac{2}{3}z) \quad ; \quad y_2 = z^{\frac{1}{2}} M(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; z)$

h) $y_1 = zM(1,1;z) = ze^z \quad ; \quad y_2 = zU(1,1;z)$

i) $y_1 = z^{\frac{1}{3}} J_0(z^{\frac{1}{2}}) \quad ; \quad y_2 = z^{\frac{1}{3}} N_0(z^{\frac{1}{2}})$

j) $y_1 = z^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(z) \quad ; \quad y_2 = z^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(z)$

k) $y_1 = z^{-2} J_1(z) \quad ; \quad y_2 = z^{-2} N_1(z)$

Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 8 **21-04-2010**

1. Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + e^{2z} y = 0$$

`Ayuda: hacer el cambio de variable` $w = e^z$. R: $y = c_1 J_0(e^z) + c_2 N_0(e^z)$

2. Dada la ecuación

$$z^2\, y'' + z\, y' + (z^2 - \frac{1}{4})\, y = 0\ ,$$

a) encontrar dos soluciones linealmente independientes alrededor de $z = 0$.
R: $y = c_1 J_{\frac{1}{2}}(z) + c_2 N_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\big\{c_1 \operatorname{sen} z - c_2 \cos z\big\}$

b) Determinar la solución que satisface $y(\frac{\pi}{4}) = 0,\ \ y(\frac{\pi}{2}) = 1$. R: $y = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\big\{\operatorname{sen} z - \cos z\big\}$

3. Dada la ecuación

$$z\, y'' - (2\alpha - 1)\, y' + z\, y = 0\ ,$$

a) probar que $y(z) = z^\alpha N_\alpha(z)$ es solución.

b) Hallar la solución general de la ecuación $z\, y'' + 7\, y' + z\, y = 0$.
R: $y = c_1 \frac{J_3(z)}{z^3} + c_2 \frac{N_3(z)}{z^3}$

4. Dada la ecuación

$$z\, y'' - \ y' - z\, y = 0$$

a) Encontrar dos soluciones linealmente independientes alrededor de $z = 0$.
`Ayuda: hacer la transformación` $y(z) = z\, u(z)$. R: $c_1\, z\, I_1(z) + c_2\, z\, K_1(z)$

b) Determinar la solución que satisface las condiciones $y(1) = 1$ y $y(z)$ acotada cuando $z \to \infty$.
R: $z\, K_1(z)/K_1(1)$, $K_1(1) = 0,6019$

5. Encontrar la solución de la ecuación inhomogénea

$$y'' + \frac{1}{x}\, y' - \frac{(x^2 + 4)}{x^2}\, y = x^2$$

con condiciones de borde $y(0) = 0$ y $y(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$.
`Ayuda: Usar la fórmula de Abel y el límite` $x \to 0$ `de` $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$, `para demostrar que` $W[K_\nu, I_\nu] = 1/x$. R: $y = -x^3\big\{I_3(x)K_2(x) + K_3(x)I_2(x)\big\}$

6. Probar que:

a) $\int J_0(x) \operatorname{sen} x\, dx = x J_0(x) \operatorname{sen} x - x J_1(x)\, \cos x + c$

b) $\int x^5 J_2(x)\, dx = 6x^2(8 - x^2)\, J_0(x) - x(x^4 - 24x^2 + 96)\, J_1(x) + c$

1. Demostrar la relación de recurrencia:

$$(2n+1)\,x\,P_n(x) = (n+1)\,P_{n+1}(x) + n\,P_{n-1}(x)$$

`Ayuda: Utilizar` $(1-2xt+t^2)\dfrac{\partial g}{\partial t} = (x-t)g$.

2. Para $\ell \neq 0$, demostrar:

$$\int_0^1 P_\ell(x)\,dx = \frac{P_{\ell-1}(0)}{\ell+1} = \begin{cases} 0 & , \quad \ell = 2n \\ \\ \dfrac{(-1)^n\,(2n)!}{2^{2n+1}\,(n+1)!\,n!} & , \quad \ell = 2n+1 \end{cases}$$

`Ayuda: Usar relaciones de recurrencia y propiedades de` $P_\ell(x)$.

3. Evaluar las integrales:

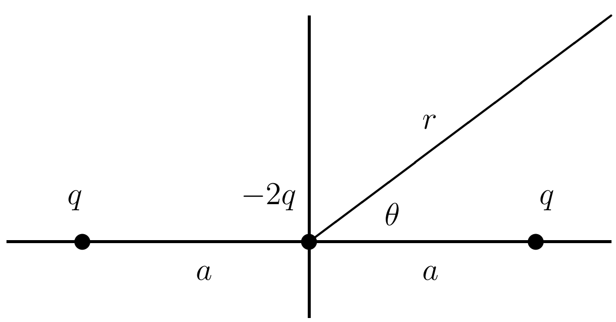
$$\text{a)} \int_{-1}^{1} x^2\,P_\ell(x)\;dx \quad ; \quad \text{b)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\,\text{sen}^2\theta\cos\varphi\,Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$

R: a) $\frac{2}{3}\delta_{\ell,0} + \frac{4}{15}\delta_{\ell,2}$, b) $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,\delta_{\ell,1}\,(\delta_{m,-1} - \delta_{m,1})$

4. Probar que el potencial eléctrico producido por el cuadrupolo de la figura a una distancia r del origen ($r > a$), está dado por

$$V(r) = \frac{2q}{r}\sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}(\cos\theta)\,\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}$$

Probar que para $r \gg a$, $V(r) \simeq \dfrac{qa^2}{r^3}\,(3\,\cos^2\theta - 1)$.



Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 10 **03-05-2010**

1. Demostrar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, x^2 H_n(x)\, H_m(x)\, dx = 2^n\, n!\, \sqrt{\pi}\, \left[(n+2)(n+1)\delta_{m,n+2} + (n+\tfrac{1}{2})\delta_{m,n} + \tfrac{1}{4}\delta_{m,n-2}\right]$$

2. Dada la ecuación de Laguerre: $x\, y'' + (1-x)\, y' + n\, y = 0$, probar que:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, L_m(x)\, L_n(x)\, dx = c_n\, \delta_{m,n}$$

   Utilizando la función generadora de los $L_n(x)$ demostrar que $c_n = 1$.

3. Evaluar las integrales:

$$\text{a)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, x^3\, H_n(x)\ dx \quad ; \quad \text{b)} \int_{0}^{\infty} e^{-x}\, x^3\, L_5(x)\ dx$$

   R: a) $\sqrt{\pi}\left(\frac{3}{2}\delta_{n,1} + 6\delta_{n,3}\right)$, b) 0

4. Demostrar qua los polinomios asociados de Laguerre satisfacen:

$$\text{a)}\ L_0^k(x) = 1 \qquad ; \qquad \text{b)}\ L_1^k(x) = (k+1) - x$$

Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 11 **17-05-2010**

1. Encontrar los autovalores y autovectores del problema de Sturm-Liouville

$$y'' = \lambda\, y \qquad ; \qquad y'(0) = 0 \qquad ; \qquad y(L) = 0$$

R: $\lambda_n = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$, $y_n(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

2. Encontrar los autovalores y autovectores del problema de Sturm-Liouville

$$y'' = \lambda\, y \qquad ; \qquad y'(0) = 0 \qquad ; \qquad y'(L) = 0$$

R: $\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $y_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, (notar que $y_0 = 1$ es autofunción con autovalor $\lambda_0 = 0$.)

3. Encontrar el desarrollo en serie de Legendre de la función

$$f(x) = \begin{cases} a & , \quad -1 < x < 0 \\ \\ b & , \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

R: $$f(x) = \frac{1}{2}(b+a) + \frac{1}{4}(b-a)\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\,(4j+3)\,(2j)!}{2^{2j}(j+1)!\,j!}\, P_{2j+1}(x)$$

4. Encontrar el desarrollo en serie de $f(x) = x^3$, $x \in [0,1]$, usando como base el conjunto $\{J_1(\gamma_{1k}x)\}$, con $J_1(\gamma_{1k}) = 0$.

R: $$x^3 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\gamma_{1k}^2 - 8)}{\gamma_{1k}^3\, J_2(\gamma_{1k})}\, J_1(\gamma_{1k}x)$$

5. Demostrar que

$$1 - x^2 = 8\,\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_{0k}x)}{\gamma_{0k}^3\, J_1(\gamma_{0k})}$$

para $x \in [0,1]$.

6. Encontrar el desarrollo en serie de $f(x) = x^m$, $m \geq 1$, $x \in [0,1]$, usando como base el conjunto $\{J_m(\delta_{mk}x)\}$, con $J'_m(\delta_{mk}) = 0$.

R: $$x^m = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{mk}\, J_{m+1}(\delta_{mk})}{(\delta_{mk}^2 - m^2)\,[J_m(\delta_{mk})]^2}\, J_m(\delta_{mk}x)$$

Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 12 **24-05-2010**

1. Dos esferas concéntricas de radios a y b ($b > a$) se mantienen a potenciales dados por

$$V\,|_{r=a} = V_0 \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \qquad ; \qquad V\,|_{r=b} = V_0\, \cos^2\theta$$

Determinar el potencial para todo r. V satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$.

2. Encontrar la solución $\psi(t, \rho, \varphi)$ de la ecuación de difusión

$$\frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}$$

(α constante) en el interior de un disco de radio a con condición de frontera y condición inicial dadas por

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho}(t, a, \varphi) = 0 \qquad ; \qquad \psi(0, \rho, \varphi) = \rho^2$$

3. Hallar la solución $\psi(t, x, y)$ de la ecuación de ondas

$$\frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

en una membrana rectangular ($0 \le x \le a,\;\; 0 \le y \le b$), con condiciones de frontera

$$\psi(t, 0, y) = 0 \quad ; \quad \psi(t, a, y) = 0 \quad ; \quad \psi(t, x, 0) = 0 \quad ; \quad \psi(t, x, b) = 0$$

y condiciones iniciales

$$\psi(0, x, y) = xy(a - x)(b - y) \qquad ; \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t}(0, x, y) = 0$$

4. Encontrar la solución $\psi(t, \rho, \varphi)$ de la ecuación de difusión

$$\frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}$$

(α constante) en el interior del cuarto de disco definido por: $0 \le \rho \le a$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, con condiciones de frontera

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho}(t, a, \varphi) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}(t, \rho, 0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}(t, \rho, \frac{\pi}{2}) = 0$$

y condición inicial

$$\psi(0, \rho, \varphi) = 1 + \rho^2 \cos 2\varphi$$

5. Encontrar la solución $\psi(t,\rho,\varphi,z)$ de la ecuación de ondas

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

(v constante) en el interior de un cilindro de radio a y altura L ($0\le\rho\le a$, $0\le z\le L$, $0\le\varphi\le 2\pi$), con condiciones de frontera

$$\psi(t,a,\varphi,z)=0 \quad ; \quad \psi(t,\rho,\varphi,0)=0 \quad ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial z}(t,\rho,\varphi,L)=0$$

y condiciones iniciales

$$\psi(0,\rho,\varphi,z)=\beta \text{ (constante)} \quad ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{t}}(0,\rho,\varphi,\mathrm{z})=0$$

6. El potencial en la superficie de un conductor esférico de radio a está dado por

$$V\,|_{r=a}\begin{cases} V_o & , \quad 0\le\theta<\alpha \\ \\ 0 & , \quad \alpha<\theta\le\pi \end{cases}$$

Hallar el potencial que satisface $\nabla^2V=0$ en el interior y el exterior del conductor.

7. Un cubo de lado b se mantiene a temperatura constante T_o en las paredes $z=0$ y $z=b$, mientras que las paredes restantes se mantienen a temperatura cero. Hallar la temperatura de equilibrio ($\nabla^2T=0$) en el interior del cubo.

8. Una partícula encerrada en una esfera de radio a satisface la ecuación de Schrödinger

$$\nabla^2\Psi+k^2\Psi=0 \qquad , \qquad k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$$

junto con la condición

$$\Psi\,|_{r=a}=0$$

Probar que la energía mínima necesaria para obtener una solución no-trivial es

$$E_{min}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

Respuestas

1)

$$r<a \quad , \quad V = V_0\left(\frac{r}{a}\right)\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$$

$$a<r<b \quad , \quad V = \frac{1}{3}V_0\Bigg[\left(\frac{b}{r}\right)\left(\frac{r-a}{b-a}\right)+3\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(\frac{b^3-r^3}{b^3-a^3}\right)\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$$

$$+\left(\frac{b}{r}\right)^3\left(\frac{r^5-a^5}{b^5-a^5}\right)(3\cos^2\theta-1)\Bigg]$$

$$r>b \quad , \quad V = \frac{1}{3}V_0\left(\frac{b}{r}\right)\left[1+\left(\frac{b}{r}\right)^2(3\cos^2\theta-1)\right]$$

2)

$$\psi(t,\rho,\varphi)=\psi(t,\rho)=\frac{a^2}{2}+4a^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha\delta_{0k}^2 t/a^2}}{\delta_{0k}^2 J_0(\delta_{0k})}J_0(\tfrac{\delta_{0k}\rho}{a})$$

3)

$$\psi(t,x,y) = \frac{64a^2b^2}{\pi^6}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\omega_{jk}t}{(2j+1)^3(2k+1)^3}\operatorname{sen}\tfrac{(2j+1)\pi x}{a}\operatorname{sen}\tfrac{(2k+1)\pi y}{b}$$

$$\omega_{jk} = v\pi\sqrt{\frac{(2j+1)^2}{a^2}+\frac{(2k+1)^2}{b^2}}$$

4)

$$\psi(t,\rho,\varphi)=1+4a^2\cos 2\varphi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha\delta_{2k}^2 t/a^2}}{(\delta_{2k}^2-4)J_2(\delta_{2k})}J_2(\tfrac{\delta_{2k}\rho}{a})$$

5)

$$\psi(t,\rho,\varphi,z) = a^2\operatorname{sen}\tfrac{3\pi z}{L}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\gamma_{0k}^2-4)\,e^{-\alpha\nu_{0k}t}}{\gamma_{0k}^3\,J_1(\gamma_{0k})}J_0(\tfrac{\gamma_{0k}\rho}{a}) \;+\; \cos 2\varphi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha\nu_{2k}t}}{\gamma_{2k}\,J_3(\gamma_{2k})}J_2(\tfrac{\gamma_{2k}\rho}{a})\right\}$$

$$\nu_{mk} = \frac{\gamma_{mk}^2}{a^2}+\frac{9\pi^2}{L^2}$$

6)

$$\psi(t,\rho,\varphi,z) = \psi(t,\rho,z) = \frac{8\beta}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\omega_{nk}t}{(2n+1)\,\gamma_{0k}\,J_0'(\gamma_0 k)}\operatorname{sen}\tfrac{(2n+1)\pi z}{2L}\,J_0(\tfrac{\gamma_{0k}\rho}{a})$$

$$\omega_{nk}^2 = \frac{\gamma_{0k}^2}{a^2}+\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$$

7)

$$r < a \quad , \quad V = \frac{V_0}{2}(1-\cos\alpha) + \frac{V_0}{2}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left[P_{\ell-1}(\cos\alpha) - P_{\ell+1}(\cos\alpha)\right]\left(\frac{r}{a}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta)$$

$$r > a \quad , \quad V = \frac{V_0}{2}(1-\cos\alpha)\left(\frac{a}{r}\right) + \frac{V_0}{2}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left[P_{\ell-1}(\cos\alpha) - P_{\ell+1}(\cos\alpha)\right]\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell+1} P_\ell(\cos\theta)$$

8)

$$T(x,y,z) = \frac{16T_0}{\pi^2}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{(2j+1)\pi x}{b}\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi y}{b}}{(2j+1)(2k+1)\operatorname{senh} b\nu_{jk}}\left[\operatorname{senh}\nu_{jk}z + \operatorname{senh}\nu_{jk}(b-z)\right]$$

$$\nu_{jk} = \frac{\pi}{b}\sqrt{(2j+1)^2 + (2k+1)^2}$$