Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 3 **26-01-2017**

1. Utilizar el teorema de residuos para demostrar

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^8}\,dx \;=\; \frac{\pi}{8\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{8}}$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2+3}{x^4+5x^2+4}\,dx \;=\; \frac{5\pi}{6}$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{1+x^6}\,dx \;=\; \frac{\pi}{3}$ d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2(x^2+4)}\,dx \;=\; \frac{\pi}{9}$

2. Utilizar el teorema de residuos para demostrar

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x^n)^2}\,dx \;=\; \frac{\pi\,(n-a)}{n^2\,\mathrm{sen}\frac{\pi a}{n}}\;;\; 0<a<2n$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^3}\,dx \;=\; \frac{\pi\,(a-2)(a-1)}{2\,\mathrm{sen}\,\pi a}\;;\; 0<a<3$

3. Utilizar el teorema de residuos para demostrar

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)(1+x^2)}\,dx \;=\; \frac{\pi}{2\,\mathrm{sen}\,\pi a}\left(1-\mathrm{sen}\frac{\pi a}{2}+\cos\frac{\pi a}{2}\right) \quad ; \quad 0<a<3$$

4. Utilizando cálculo de residuos, demostrar

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5+3\,\cos\theta}\,d\theta \;=\; \frac{\pi}{18}$$

5. Utilizando cálculo de residuos, demostrar

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta}\,e^{3i\theta}\,d\theta \;=\; \frac{\pi}{3}$$

`Ayuda: hacer el cambio de variables` $z=e^{i\theta}$

6. Demostrar

a) V.P. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^3-1}\,dx \;=\; -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ b) V.P. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x(x^2-6x+10)}\,dx \;=\; \frac{3\pi}{10}$

7. Demostrar

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}\,\pi x}{x^2-4x+8}\,dx \;=\; \pi\,e^{-2\pi}$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\pi x}{x^4+4}\,dx \;=\; -\frac{\pi}{8}\,e^{-\pi}$

8. Utilizar cálculo de residuos para demostrar

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \;=\; \frac{\pi^3}{32}$ b) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{(n+\frac{1}{4})^2} \;=\; 2\pi^2$ c) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{9n^2-1} \;=\; -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$