Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 4 **30-01-2017**

1. Demostrar que $\mathrm{Res}(\Gamma(z), -n) = \dfrac{(-1)^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Evaluar las integrales

$$\text{a)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^8}\, x^4\, dx \qquad \text{b)} \int_0^{\pi/2} (\sec\theta)^{1/3} d\theta \qquad \text{c)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^6}\, x^6\, dx \qquad \text{d)} \int_0^{\pi/2} (\mathrm{sen}\,\theta)^{1/4} d\theta$$

`Usar:` $\Gamma(\frac{1}{8}) = 7,5339$; $\Gamma(\frac{5}{8}) = 1,4345$; $\Gamma(\frac{1}{3}) = 2,6789$; $\Gamma(\frac{1}{6}) = 5,5663$

R: a) $\frac{1}{4}\Gamma(\frac{5}{8})$, b) $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{1}{6})$, c) $\frac{1}{18}\Gamma(\frac{1}{6})$, d) $4\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{5}{8})/\Gamma(\frac{1}{8})$

3. Utilizar funciones Γ y B para probar que

$$\text{a)} \int_{-1}^{1} x^6 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{5\pi}{128} \quad ; \quad \text{b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{sen}\,\theta)^4\, d\theta = \frac{3\pi}{16} \quad ; \quad \text{c)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{tg}\,\theta)^{-\frac{1}{3}}\, (\cos\theta)^2\, d\theta = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

4. Demostrar que la función B satisface $B(\frac{1}{2}, z) = 2^{2z-1} B(z,z)$.

5. Demostrar que la función Digamma $\psi(z) = \dfrac{d}{dz}\ln\Gamma(z)$ satisface las propiedades:

a) $\psi(1+z) = \dfrac{1}{z} + \psi(z)$ b) $\psi(1-z) = \psi(z) + \pi\mathrm{ctg}\,\pi z$

6. A partir de las representaciones integrales de la función modificada de Bessel $K_n(t)$:

$$K_n(t) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{2}(x+\frac{1}{x})}\, x^{-n-1}\, dx \qquad ; \qquad K_n(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\cosh x}\, \cosh nx\, dx$$

demostrar que $K_n(t) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2t}}\, e^{-t}$ para $t \gg 1$. Verificar que se cumplen las condiciones necesarias para aplicar el método del descenso rápido.

7. Dada la representación integral de la función de Airy, $\mathrm{Ai}(t^{2/3}) = \dfrac{t^{1/3}}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathcal{C}} e^{it(z+\frac{z^3}{3})}\, dz$

a) Verificar que se cumplen las condiciones necesarias para aplicar el método del descenso rápido en la aproximación de la integral cuando $t \gg 1$.

b) Probar que $\mathrm{Ai}(u) \simeq \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\, u^{-1/4}\, e^{-\frac{2}{3}u^{3/2}}$, $u \gg 1$