Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 5 **14-02-2017**

1. Hallar la solución general de:

   a) $y'' - \frac{2}{z^2}\, y = z e^z$; b) $y'' - \frac{3}{z}\, y' + \frac{4}{z^2}\, y = z$

   R: a) $y(z) = c_1 z^2 + \dfrac{c_2}{z} + \dfrac{e^z}{z}(z^2 - 2z + 2)$; b) $y(z) = c_1 z^2 + c_2\, z^2 \ln z + z^3$

2. Localizar y clasificar todos los puntos singulares (en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) de las ecuaciones diferenciales:

   a) $z^2(z-4)y'' + (z-4)y' + 2y = 0$; b) $z^2(z^2+1)y'' + z(z^2+1)y' - y = 0$; c) $z^4 y'' + y = 0$

   d) $(z+1)y'' + 2zy' + 4y = 0$; e) $(9+z^2)y'' - 2y = 0$; f) $y'' - zy = 0$; g) $z^2 y'' - y = 0$

   R: a) psr=$\{4,\infty\}$, psi=$\{0\}$; b) psr=$\{0,\, i,\, -i,\, \infty\}$; c) psr=$\{\infty\}$, psi=$\{0\}$

   R: d) psr=$\{-1\}$, psi=$\{\infty\}$; e) psr=$\{3i, -3i, \infty\}$; f) psi=$\{\infty\}$; g) psr=$\{0, \infty\}$

3. Dada la ecuación de Hermite: $y'' - 2zy' + 2\lambda y = 0$

   a) Clasificar los puntos singulares. R: psi=$\{\infty\}$

   b) Hallar dos soluciones linealmente independientes alrededor de $z = 0$. Determinar el radio de convergencia.

   c) Probar que para $\lambda = m \in \mathbb{N}$, una solución se convierte en un polinomio. Determinar estos polinomios cuando $\lambda = 2, 3$. R: $H_2 = \alpha_0(1 - 2z^2)$, $H_3 = \alpha_1(z - \frac{2}{3}z^3)$

4. Hallar dos soluciones linealmente independientes alrededor de $z = 0$ de las ecuaciones:

   a) $(9 + z^2)\, y'' - 2y = 0$; b) $(1 - z^2)\, y'' - zy' - y = 0$; c) $y'' - zy = 0$ (ec. de Airy)

   Determinar el radio de convergencia.

   R: a) $y_1 = \alpha_0(1 + \frac{z^2}{9})$, $y_2 = 3\alpha_1 \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(4j^2 - 1)} \left(\frac{z}{3}\right)^{2j+1}$, $R = 3$

   b) $y_1 = \alpha_0(1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{5}{24}z^4 + \frac{17}{144}z^6 + \cdots)$; $y_2 = \alpha_1(z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{6}z^5 + \frac{13}{126}z^7 + \cdots)$; $R = 1$

   c) $y_1 = \alpha_0(1 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{180}z^6 + \frac{1}{12960}z^9 + \cdots)$; $y_2 = \alpha_1(z + \frac{1}{12}z^4 + \frac{1}{504}z^7 + \frac{1}{45360}z^{10} + \cdots)$; $R \to \infty$

5. Dada la ecuación de Laguerre: $zy'' + (1 - z)y' + \lambda y = 0$

   a) Clasificar los puntos singulares. R: psr=$\{0\}$, psi=$\{\infty\}$

   b) Utilizar el método de Fröbenius para hallar una solución alrededor de $z = 0$. Determinar el radio de convergencia.

   c) Probar que para $\lambda = m \in \mathbb{N}$, la solución anterior se convierte en un polinomio. Determinar estos polinomios cuando $\lambda = 1, 2$. R: $L_1 = \alpha_0(1 - z)$, $L_2 = \alpha_0(1 - 2z + \frac{1}{2}z^2)$

   d) Encontrar una segunda solución independiente cuando $\lambda = 0$. ¿ Es esta solución analítica en $z = 0$? (`Ayuda:` $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots$) R: $y_2 = \ln z + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n n!}$, singular en $z = 0$