Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 6 **20-02-2017**

1. Utilizar el método de Fröbenius para hallar dos soluciones linealmente independientes, alrededor de $z=0$, de las ecuaciones:

   a) $z(z+2)y''+(1+z)y'-y=0$, b) $z^2y''+zy'-(z-1)y=0$

   c) $4z^2y''-(z-\frac{3}{4})y=0$, d) $zy''+2y'+zy=0$

   R: a) $y_1=\dfrac{z^{1/2}}{\Gamma(-\frac{1}{2})}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\Gamma(k-\frac{1}{2})\,z^k}{2^k\,k!}=z^{1/2}\left(1+\frac{z}{2}\right)^{1/2}=z^{1/2}\left(1+\frac{z}{4}-\frac{z^2}{32}+\cdots\right)$; $y_2=1+z$

   b) $y_1=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+2i)\,z^{k+i}}{\Gamma(k+1+2i)\,k!}=z^{i}\left(1+\frac{(1-2i)}{5}z-\frac{(1+3i)}{40}z^2+\cdots\right)$

   $y_2=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1-2i)\,z^{k-i}}{\Gamma(k+1-2i)\,k!}=z^{-i}\left(1+\frac{(1+2i)}{5}z-\frac{(1-3i)}{40}z^2+\cdots\right)$

   c) $y_1=z^{3/4}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(2k+1)!}=z^{1/4}\mathrm{senh}\sqrt{z}=z^{3/4}\left(1+\frac{z}{6}+\frac{z^2}{120}+\cdots\right)$

   $y_2=z^{1/4}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(2k)!}=z^{1/4}\cosh\sqrt{z}=z^{1/4}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{24}+\cdots\right)$

   d) $y_1=\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j+1)!}=\frac{\mathrm{sen}\,z}{z}$; $y_2=z^{-1}\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j)!}=\frac{\cos z}{z}$

2. Dadas las ecuaciones:

   a) $z(1+z)y''-y'-2y=0$, b) $zy''+2y'+\frac{1}{4}y=0$, c) $4z^2y''+4zy'-zy=0$

   utilizar el método de Fröbenius para hallar una solución $y_1(z)$ alrededor de $z=0$. Hallar una solución $y_2(z)$ linealmente independiente de $y_1(z)$. ¿ Es $y_2(z)$ analítica en $z=0$? Justifique su respuesta.

   R: a) $y_1=z^2$; $y_2=y_1\ln z+\left[-\frac{1}{2}+z-z^2\ln(1+z)\right]=z^2\ln z+\left(-\frac{1}{2}+z-z^3+\frac{1}{2}z^4+\cdots\right)$

   b) $y_1=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,z^k}{2^{2k}\,(k+1)!\,k!}=1-\frac{z}{8}+\frac{z^2}{192}-\frac{z^3}{9216}+\cdots$

   $y_2=\frac{1}{4}y_1\ln z+z^{-1}\left(-1+\frac{z}{8}+\frac{z^2}{32}-\frac{11z^3}{4608}+\cdots\right)$

   c) $y_1=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^{2k}\,(k!)^2}=1+\frac{z}{4}+\frac{z^2}{64}+\frac{z^3}{2304}+\cdots$

   $y_2=y_1\ln z-\left(\frac{z}{2}+\frac{3z^2}{64}+\frac{11z^3}{6912}+\cdots\right)$

   En los tres casos y_2 no es analítica en $z=0$.