Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 7 **23-02-2017**

1. Demostrar que las funciones hipergeométricas $F(a,b,c;z)$ y $M(a,c;z)$ satisfacen las propiedades:

$$\text{a) } \frac{d}{dz}F(a,b,c;z) = \frac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1;z) \qquad ; \qquad \text{b) } \frac{d}{dz}M(a,c;z) = \frac{a}{c}M(a+1,c+1;z)\ .$$

2. Demostrar que la ecuación: $(1-z^2)y'' - zy' + m^2 y = 0$, $m = 0,1,2,3,\cdots$, admite una solución polinómica dada por

$$F(-m,m,\frac{1}{2},\frac{1-z}{2}) \equiv T_m(z)\ .$$

`Ayuda: hacer el cambio de variable` $z = 1-2w$.

3. Demostrar que la solución general de la ecuación $4z(z-1)y'' + (8z-2)y' + y = 0$, alrededor de $z=1$, está dada por:

$$y = c_1\, F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},1-z) + c_2\,(1-z)^{-1/2}.$$

4. Dada la la ecuación:

$$4z(z-1)\,y'' - 2\,y' +\, y = 0,$$

encontrar dos soluciones linealmente independientes alrededor de $z=0$. Determinar la solución analítica en $z=0$ y que satisface $y(1)=1$. R: $y_1 = F(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},z)$, $y_2 = z^{\frac{1}{2}}$, $y = \frac{2}{\pi}y_1$

5. Demostrar que la solución general de la ecuación $3zy'' - (1+3z)y' + y = 0$, alrededor de $z=0$, está dada por:

$$y = c_1 e^z + c_2\, z^{4/3} M(1;\tfrac{7}{3},z)\ .$$

6. Probar que la ecuación $zy'' - (1+z)y' - 3y = 0$ tiene una solución analítica en $z=0$ dada por

$$y_1 = z^2 M(5,3,z) = z^2 e^z (1 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{12}z^2).$$

¿ Es la segunda solución independiente analítica en $z=0$? Justifique.

7. El período T de un péndulo simple (longitud ℓ) puede expresarse en términos de una integral elíptica según:

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2\text{sen}^2\varphi}} \qquad ; \qquad K = \text{sen}\frac{\theta_M}{2},$$

donde θ_M es el ángulo de máxima amplitud.

a) Usando la representación integral de $F(a,b,c,z)$ probar que $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,K^2)$.
Demostrar entonces que $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,(1 + \frac{1}{16}\theta_M^2 + \cdots)$.

8. Demostrar: a) $\displaystyle\int_0^z e^{-t^2}dt = zM(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-z^2)$; b) $M(c-a,c,z) = e^z M(a,c,-z)$.