Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 9 **13-03-2017**

1. Hallar 2 soluciones linealmente independientes de la ecuación: $(1-z^2)y'' - 2zy' + 2y(z) = 0$.
   R: $y_1 = z$, $y_2 = \dfrac{z}{2}\ln\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) - 1$.

2. Demostrar que la función generadora $g(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$ satisface:

$$\text{a) } t\frac{\partial}{\partial t}(tg) = (1-xt)\frac{\partial g}{\partial x} \quad ; \quad \text{b) } (1-2xt+t^2)\frac{\partial g}{\partial t} = (x-t)g \ .$$

3. Utilizar $g(x,t) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x)t^\ell$ y los resultados del problema 2 para demostrar que:

$$\text{a) } \ P_0'(x) = 0 \quad ; \quad (n+1)P_n(x) = P_{n+1}'(x) - xP_n'(x) \ , \ n \geq 0 \ ,$$

$$\text{b) } \ P_1(x) = xP_0(x) \quad ; \quad (2n+1)\,x\,P_n(x) = (n+1)\,P_{n+1}(x) + n\,P_{n-1}(x) \ , \ n \geq 1 \ .$$

4. Para $\ell \neq 0$, demostrar:

$$\int_0^1 P_\ell(x)\,dx = \frac{P_{\ell-1}(0)}{\ell+1} = \begin{cases} 0 & , \quad \ell = 2n \\ \\ \dfrac{(-1)^n\,(2n)!}{2^{2n+1}\,(n+1)!\,n!} & , \quad \ell = 2n+1 \end{cases}$$

   `Ayuda: Usar relaciones de recurrencia y propiedades de` $P_\ell(x)$.

5. Evaluar las integrales:

$$\text{a) } \int_{-1}^{1} x^n\,P_\ell(x)\ dx \ , \ n < \ell \quad ; \quad \text{b) } \int_{-1}^{1} x^2\,P_\ell(x)\ dx \quad ; \quad \text{c) } \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \,\mathrm{sen}^2\theta\cos\varphi\,Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$

   R: a) 0, b) $\frac{2}{3}\delta_{\ell,0} + \frac{4}{15}\delta_{\ell,2}$, c) $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,\delta_{\ell,1}\,(\delta_{m,-1} - \delta_{m,1})$

6. Probar que el potencial eléctrico producido por el cuadrupolo de la figura a una distancia r del origen ($r > a$), está dado por:

$$V(r) = \frac{2q}{r}\ \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}(\cos\theta)\ \left(\frac{a}{r}\right)^{2n}$$

   Probar que para $r \gg a$, $V(r) \simeq \dfrac{qa^2}{r^3}\,(3\,\cos^2\theta - 1)$.