Métodos Matemáticos de la Física II, Guía 1 **16-03-2012**

1. Graficar las regiones determinadas por las desigualdades:

   a) $|5z - 3 + i| > 4$; b) $|z-3| + |z+3| < 10$

   R: a) exterior de disco de radio $\frac{4}{5}$ y centro en $z_0 = \frac{3-i}{5}$; b) interior de elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

2. Utilizar $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$ para demostrar que $\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^4\theta$.

3. Resolver: a) $z^6 = 32(\sqrt{3} + i)$, b) $z^4 + iz^2 + 2 = 0$

   R: a) $z_k = 2e^{\frac{i(12k+1)\pi}{36}}$, $k = 0, \cdots, 5$; b) $z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$, $z_2 = e^{\frac{5i\pi}{4}}$, $z_3 = \sqrt{2}\, e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $z_4 = \sqrt{2}\, e^{\frac{7i\pi}{4}}$

4. Utilizando las definiciones de las funciones trigonométricas e hiperbólicas, probar

   a) $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$; $|\cosh z|^2 - |\operatorname{senh} z|^2 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 y$

   b) $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$; $|\cos z|^2 + |\operatorname{sen} z|^2 = 1 + 2\operatorname{senh}^2 y$ $(z = x + iy)$

5. Hallar todas las soluciones de: a) $e^z = -1$, b) $\cosh z = 0$.

   R: a) $z_k = i(2k+1)\pi$, b) $z_k = i(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Determinar si $u(x, y)$ puede ser la parte real de una función analítica, y en ese caso determinar la función conjugada $v(x, y)$ tal que $f = u + iv$ sea analítica.

   a) $u(x, y) = e^x (x \cos y - y \operatorname{sen} y)$; b) $u(x, y) = 2x + y^3 - 3x^2 y$; c) $u(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

   R: a) $v(x, y) = e^x (x \operatorname{sen} y + y \cos y) + c$, $f = ze^z + ic$

   b) $v(x, y) = 2y + x^3 - 3xy^2 + c$, $f = 2z + iz^3 + ic$ ($c \in \mathbb{R}$ constante , $z = x + iy$)

7. Evaluar las siguientes expresiones en la hoja $-\pi < \theta < \pi$:

   a) $(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2})^{1-i}$; b) $(-5i)^i$

   R: a) $e^{-\frac{\pi}{6}} (\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2})$; b) $e^{\frac{\pi}{2}} \big[\cos(\ln 5) + i \operatorname{sen}(\ln 5) \big]$

8. Dada la transformación $w = \dfrac{i - z}{i + z}$, hallar la imagen de todos los puntos con $\operatorname{Im} z \geq 0$.

   R: $|w| \leq 1$

9. Dada la función $f(z) = (z - 1 + 3i)^{1/4}$,

   a) hallar los puntos de ramificación en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. R: $1 - 3i$, ∞

   b) determinar cortes de rama tal que $f(z)$ sea univaluada. R: $z - 1 + 3i = re^{i\theta}$, $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$

   c) describir la superficie de Riemann asociada a $f(z)$.
   R: consiste de cuatro hojas, es topológicamente equivalente a una esfera.

   Repetir para $f(z) = \sqrt{z^3 + 8i}$.

1. Evaluar las integrales:
$$\text{a)} \int_\gamma \overline{z}^2\, dz \qquad ; \qquad \text{b)} \int_\gamma z^2\, dz$$
para $\gamma(t) = 1 + 2\, e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. R: a) $16i\pi$, b) 0

2. Evaluar la integral:
$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$$
donde γ es la curva: a) $\gamma(t) = i + 2\cos t + 3i \operatorname{sen} t$, b) $\gamma(t) = 4 + 2\cos t + 3i \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 6\pi]$.
R: a) $6i\pi$, b) 0

3. Evaluar las integrales:
$$\text{a)} \int_\gamma \frac{z}{\cosh z}\, dz \quad ; \quad \text{b)} \int_\gamma \operatorname{ctg} z\, dz \quad ; \quad \text{c)} \int_\gamma \frac{dz}{(z^2+4)^2} \quad ; \quad \text{d)} \int_\gamma \frac{z^2}{\operatorname{sen} z} dz$$
para las curvas dadas por $\gamma(t) = 4\, e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ y $\gamma(t) = 2i + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
R: a) $2i\pi^2$, $i\pi^2$; b) $6i\pi$, 0 ; c) 0, $\frac{\pi}{16}$; c) $-4i\pi^3$, 0

4. Hallar los primeros cuatro términos de la serie de Laurent alrededor de $z = 0$, y en $0 < |z| < 1$, de las funciones:
$$\text{a)}\ f(z) = \frac{1}{e^z - 1} \qquad ; \qquad \text{b)}\ f(z) = \frac{1}{z} \operatorname{ctg} z$$
R: a) $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{z}{12} - \dfrac{z^3}{720} + \cdots$; b) $\dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{z^2}{45} - \dfrac{2z^4}{945} + \cdots$

5. Hallar la serie de Laurent alrededor de $z = 0$, y en $0 < |z| < \infty$, de las funciones:
$$\text{a)}\ f(z) = z^4\, e^{1/z} \qquad ; \qquad \text{b)}\ f(z) = \frac{1}{z} \cos \frac{1}{z^2}$$
R: a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{4-k}}{k!}$; b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!\, z^{4k+1}}$

6. Hallar la serie de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z(1+z^2)}$ alrededor de $z = 0$, en: a) $0 < |z| < 1$, b) $|z| > 1$.
R: a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, z^{2k-1}$; b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{2k+3}}$

7. Clasificar las singularidades en $\mathbb{C}$, y determinar los respectivos residuos, de las siguientes funciones:

a) $f(z) = e^{z/(z-1)}$

b) $f(z) = \operatorname{tg}^2 z$

c) $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$

d) $f(z) = \dfrac{1}{z - z^4}$

e) $f(z) = \dfrac{1}{z(e^{2z} - 1)}$

f) $f(z) = \dfrac{\operatorname{ctg} z}{z}$

g) $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2}$

h) $f(z) = \dfrac{e^z - 1 - z}{z^3}$

i) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2 - iz + 2}$

j) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 \tanh z}$

k) $f(z) = z^3 \cos \dfrac{1}{z}$

l) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^4}$

Respuestas ($n \in \mathbb{Z}$)

a) $z = 1$, singularidad esencial, $\operatorname{Res}(f, 1) = e$.

b) $z_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, polos dobles, $\operatorname{Res}(f, z_n) = 0$.

c) $z = 0$, sing. removible. $z_n = 2in\pi$, $n \neq 0$, polos simples, $\operatorname{Res}(f, z_n) = 2in\pi$.

d) $z = 0$, polo simple, $\operatorname{Res}(f, 0) = 1$. $z_k = e^{2i\pi k/3}$, $k = 0, 1, 2$, polos simples, $\operatorname{Res}(f, z_k) = -\frac{1}{3}$.

e) $z = 0$, polo doble, $\operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{1}{2}$. $z_n = in\pi$, $n \neq 0$, polos simples, $\operatorname{Res}(f, z_n) = -\frac{i}{2n\pi}$.

f) $z = 0$, polo doble, $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$. $z_n = n\pi$, $n \neq 0$, polos simples, $\operatorname{Res}(f, z_n) = \frac{1}{n\pi}$.

g) $z = \pm i$, polos dobles, $\operatorname{Res}(f, \pm i) = \mp \frac{i}{4}$.

h) $z = 0$, polo simple, $\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{2}$.

i) $z = -i$, polo simple, $\operatorname{Res}(f, -i) = \frac{1}{3}(1+i)$. $z = 2i$, polo simple, $\operatorname{Res}(f, 2i) = \frac{1}{3}(2-i)$.

j) $z = 0$, polo triple, $\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{3}$. $z_n = in\pi$, $n \neq 0$, polos simples, $\operatorname{Res}(f, z_n) = -\frac{1}{n^2\pi^2}$.

k) $z = 0$, singularidad esencial, $\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{24}$.

l) $z = 0$, polo triple, $\operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{1}{6}$.

1. Utilizar el teorema de residuos para demostrar

a) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^6}\,dx = \frac{2\pi}{3}$$
b) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2(x^2+2x+2)}\,dx = \frac{13\pi}{50}$$

c) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^6}\,dx = \frac{\pi}{3}$$
d) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2(x^2+2x+2)}\,dx = \frac{7\pi}{50}$$

2. Utilizar el teorema de residuos para demostrar

a) $$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{(1+x^n)^2}\,dx = \frac{\pi\,(n-a)}{n^2\operatorname{sen}\frac{\pi a}{n}}\ ;\ 0<a<2n$$
b) $$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{(1+x)^3}\,dx = \frac{\pi\,(a-2)(a-1)}{2\operatorname{sen}\pi a}\ ;\ 0<a<3$$

3. Utilizar el teorema de residuos para demostrar

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{(1+x)(1+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{2\operatorname{sen}\pi a}\left(1-\operatorname{sen}\frac{\pi a}{2}+\cos\frac{\pi a}{2}\right) \quad ; \quad 0<a<3$$

4. Utilizando cálculo de residuos, demostrar

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{5+3\,\cos\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{18}$$

5. Utilizando cálculo de residuos, demostrar

$$\int_{0}^{2\pi} e^{\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta}\, e^{3i\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{3}$$

`Ayuda: hacer el cambio de variables` $z=e^{i\theta}$

6. Demostrar

a) $$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^3-1}\,dx = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$
b) $$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x(x^2-6x+10)}\,dx = \frac{3\pi}{10}$$

7. Demostrar

a) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\operatorname{sen}\pi x}{x^2-4x+8}\,dx = \pi\,e^{-2\pi}$$
b) $$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\pi x}{x^4+4}\,dx = -\frac{\pi}{8}\,e^{-\pi}$$

8. Utilizar cálculo de residuos para demostrar

a) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$
b) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+\frac{1}{4})^2} = 2\pi^2$$
c) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{9n^2-1} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

1. Evaluar las integrales

$$\text{a)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^8}\, x^4\, dx \qquad \text{b)}\int_0^{\pi/2} (\sec\theta)^{1/3} d\theta \qquad \text{c)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^6}\, x^6\, dx \qquad \text{d)}\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}\theta)^{1/4} d\theta$$

`Usar:` $\Gamma(\frac{1}{8}) = 7{,}5339$; $\Gamma(\frac{5}{8}) = 1{,}4345$; $\Gamma(\frac{1}{3}) = 2{,}6789$; $\Gamma(\frac{1}{6}) = 5{,}5663$

R: a) $\frac{1}{4}\Gamma(\frac{5}{8})$, b) $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{1}{6})$, c) $\frac{1}{18}\Gamma(\frac{1}{6})$, d) $4\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{5}{8})/\Gamma(\frac{1}{8})$

2. Utilizar funciones Γ y B para probar que

$$\text{a)}\ \int_{-1}^{1} x^6 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{5\pi}{128} \quad ; \quad \text{b)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}\theta)^4\, d\theta = \frac{3\pi}{16} \quad ; \quad \text{c)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg}\theta)^{-\frac{1}{3}}\, (\cos\theta)^2\, d\theta = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

3. Demostrar que la función B satisface $B(\frac{1}{2}, z) = 2^{2z-1} B(z,z)$.

4. Demostrar que la función Digamma $\psi(z) = \dfrac{d}{dz}\ln\Gamma(z)$ satisface las propiedades:

a) $\psi(1+z) = \dfrac{1}{z} + \psi(z)$ b) $\psi(1-z) = \psi(z) + \pi\operatorname{ctg}\pi z$

5. A partir de las representaciones integrales de la función modificada de Bessel $K_n(t)$:

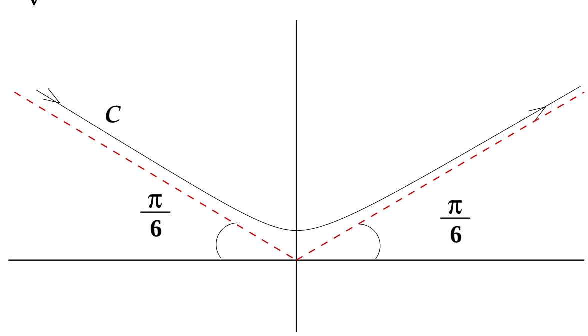
$$K_n(t) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{2}(x+\frac{1}{x})}\, x^{-n-1}\, dx \qquad ; \qquad K_n(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\cosh x}\, \cosh nx\, dx$$

demostrar que $K_n(t) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2t}}\, e^{-t}$ para $t \gg 1$. Verificar que se cumplen las condiciones necesarias para aplicar el método del descenso rápido.

6. Dada la representación integral de la función de Airy, $\operatorname{Ai}(t^{2/3}) = \dfrac{t^{1/3}}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathcal{C}} e^{it(z+\frac{z^3}{3})}\, dz$

a) Verificar que se cumplen las condiciones necesarias para aplicar el método del descenso rápido en la aproximación de la integral cuando $t \gg 1$.

b) Probar que $\operatorname{Ai}(u) \simeq \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\, u^{-1/4}\, e^{-\frac{2}{3}u^{3/2}} \quad , \quad u \gg 1$



1. Hallar la solución general de:

   a) $y'' - \frac{2}{z^2}\, y = z e^z$; R: $y(z) = c_1 z^2 + \dfrac{c_2}{z} + \dfrac{e^z}{z}(z^2 - 2z + 2)$

   b) $y'' - \frac{3}{z}\, y' + \frac{4}{z^2}\, y = z$; R: $y(z) = c_1 z^2 + c_2\, z^2 \ln z + z^3$

2. Localizar y clasificar todos los puntos singulares (en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) de las ecuaciones diferenciales:

   a) $z^2(z-4)y'' + (z-4)y' + 2y = 0$; R: psr=$\{4,\infty\}$, psi=$\{0\}$

   b) $z^2(z^2+1)y'' + z(z^2+1)y' - y = 0$; R: psr=$\{0,\, i,\, -i,\, \infty\}$, psi=$\{\}$

   c) $z^4 y'' + y = 0$; R: psr=$\{\infty\}$, psi=$\{0\}$

   d) $(z+1)y'' + 2zy' + 4y = 0$; R: psr=$\{-1\}$, psi=$\{\infty\}$

3. Dada la ecuación de Hermite:
$$y'' - 2zy' + 2\lambda y = 0$$

   a) Clasificar los puntos singulares. R: psr=$\{\}$, psi=$\{\infty\}$

   b) Hallar dos soluciones linealmente independientes alrededor de $z = 0$. Determinar el radio de convergencia.

   c) Probar que para $\lambda = m \in \mathbb{N}$, una solución se convierte en un polinomio. Determinar estos polinomios cuando $\lambda = 2, 3$. R: $H_2 = \alpha_0(1 - 2z^2)$, $H_3 = \alpha_1(z - \frac{2}{3}z^3)$

4. Hallar dos soluciones linealmente independientes alrededor de $z = 0$ de la ecuación:
$$(9 + z^2)\, y'' - 2y = 0$$
Determinar el radio de convergencia. R: $y_1 = \alpha_0(1 + \frac{z^2}{9})$, $y_2 = 3\alpha_1 \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(4j^2-1)} \left(\frac{z}{3}\right)^{2j+1}$, $R = 3$

5. Dada la ecuación de Laguerre:
$$zy'' + (1-z)y' + \lambda y = 0$$

   a) Clasificar los puntos singulares. R: psr=$\{0\}$, psi=$\{\infty\}$

   b) Utilizar el método de Fröbenius para hallar una solución alrededor de $z = 0$. Determinar el radio de convergencia.

   c) Probar que para $\lambda = m \in \mathbb{N}$, la solución anterior se convierte en un polinomio. Determinar estos polinomios cuando $\lambda = 1, 2$. R: $L_1 = \alpha_0(1 - z)$, $L_2 = \alpha_0(1 - 2z + \frac{1}{2}z^2)$

   d) Encontrar una segunda solución independiente cuando $\lambda = 0$. ¿ Es esta solución analítica en $z = 0$? (`Ayuda:` $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots$) R: $y_2 = \ln z + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n n!}$, singular en $z = 0$

1. Utilizar el método de Fröbenius para hallar dos soluciones linealmente independientes, alrededor de $z = 0$, de las ecuaciones:

$$\text{a) } z(z+2)y'' + (1+z)y' - y = 0\ , \quad \text{b) } z^2y'' + zy' - (z-1)y = 0\ , \quad \text{c) } 4z^2y'' - (z - \tfrac{3}{4})y = 0$$

R: a) $y_1 = \dfrac{z^{1/2}}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\Gamma(k-\frac{1}{2})\,z^k}{2^k\,k!} = z^{1/2}\left(1+\frac{z}{2}\right)^{1/2} = z^{1/2}\left(1+\frac{z}{4}-\frac{z^2}{32}+\cdots\right)$; $y_2 = 1+z$

b) $y_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+2i)\,z^{k+i}}{\Gamma(k+1+2i)\,k!} = z^i\left(1+\frac{(1-2i)}{5}z - \frac{(1+3i)}{40}z^2+\cdots\right)$

$y_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-2i)\,z^{k-i}}{\Gamma(k+1-2i)\,k!} = z^{-i}\left(1+\frac{(1+2i)}{5}z - \frac{(1-3i)}{40}z^2+\cdots\right)$

c) $y_1 = z^{3/4}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(2k+1)!} = z^{1/4}\text{senh}\,\sqrt{z} = z^{3/4}\left(1+\frac{z}{6}+\frac{z^2}{120}+\cdots\right)$

$y_2 = z^{1/4}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(2k)!} = z^{1/4}\cosh\sqrt{z} = z^{1/4}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{24}+\cdots\right)$

2. Dadas las ecuaciones:

$$\text{a) } z(1+z)y'' - y' - 2y = 0\ , \quad \text{b) } zy'' + 2y' + \tfrac{1}{4}y = 0\ \ , \quad \text{c) } 4z^2y'' + 4zy' - zy = 0$$

utilizar el método de Fröbenius para hallar una solución $y_1(z)$ alrededor de $z = 0$. Hallar una solución $y_2(z)$ linealmente independiente de $y_1(z)$. ¿ Es $y_2(z)$ analítica en $z = 0$? Justifique su respuesta.

R: a) $y_1 = z^2$; $y_2 = y_1 \ln z + \left[-\frac{1}{2} + z - z^2\ln(1+z)\right] = z^2\ln z + \left(-\frac{1}{2}+z-z^3+\frac{1}{2}z^4+\cdots\right)$

b) $y_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,z^k}{2^{2k}\,(k+1)!\,k!} = 1 - \frac{z}{8} + \frac{z^2}{192} - \frac{z^3}{9216} + \cdots$

$y_2 = \frac{1}{4}y_1\ln z + z^{-1}\left(-1+\dfrac{z}{8}+\dfrac{z^2}{32}-\dfrac{11z^3}{4608}+\cdots\right)$

c) $y_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{2k}\,(k!)^2} = 1 + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{64} + \frac{z^3}{2304} + \cdots$

$y_2 = y_1\ln z - \left(\dfrac{z}{2}+\dfrac{3z^2}{64}+\dfrac{11z^3}{6912}+\cdots\right)$

En los tres casos y_2 no es analítica en $z = 0$ porque $\ln z$ tiene un punto de ramificación en $z = 0$.

1. Demostrar que la función hipergeométrica $F(a,b,c;z)$ satisface la propiedad:
$$\frac{d}{dz}F(a,b,c;z) = \frac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1;z)\ .$$

2. Considere la ecuación hipergeométrica $z(z-1)y'' + [(1+a+b)z - c]y' + aby = 0$. Demostrar que cuando $(a-b) \notin \mathbb{Z}$ existen dos soluciones independientes alrededor de ∞ dadas por
$$y_1 = \left(\frac{1}{z}\right)^a F(a, 1+a-c; 1+a-b; \frac{1}{z}) \quad ; \quad y_2 = \left(\frac{1}{z}\right)^b F(b, 1+b-c; 1+b-a; \frac{1}{z})\ .$$

3. Demostrar que la solución general de la ecuación $4z(z-1)y'' + (8z-2)y' + y = 0$, alrededor de $z = 1$, está dada por:
$$y = c_1\, F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1-z) + c_2\,(1-z)^{-1/2}.$$

4. Dada la la ecuación:
$$4z(z-1)\, y'' - 2\, y' +\ y = 0,$$
encontrar dos soluciones linealmente independientes alrededor de $z = 0$. Determinar la solución analítica en $z = 0$ y que satisface $y(1) = 1$. R: $y_1 = F(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z)$, $\quad y_2 = z^{\frac{1}{2}}$, $\quad y = \frac{2}{\pi}y_1$

5. Demostrar que la solución general de la ecuación $3zy'' - (1+3z)y' + y = 0$, alrededor de $z = 0$, está dada por:
$$y = c_1 e^z + c_2\, z^{4/3} M(1; \tfrac{7}{3}, z)\ .$$

6. Probar que la ecuación $zy'' - (1+z)y' - 3y = 0$ tiene una solución analítica en $z = 0$ dada por
$$y_1 = z^2 M(5,3,z) = z^2 e^z (1 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{12}z^2).$$
¿ Es la segunda solución independiente analítica en $z = 0$? Justifique.

7. El período T de un péndulo simple (longitud ℓ) puede expresarse en términos de una integral elíptica según:
$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - K^2 \mathrm{sen}^2\varphi}} \qquad ; \qquad K = \mathrm{sen}\theta_M/2,$$
donde θ_M es el ángulo de máxima amplitud.

   a) Usando la representación integral de $F(a,b,c,z)$ probar que $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\, F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, K^2)$.

   b) Probar entonces que $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,(1 + \frac{1}{16}\theta_M^2 + \cdots)$.

1. Hallar la solución general de la ecuación $y'' + e^{2z}y = 0$.

   `Ayuda: hacer el cambio de variable` $w = e^z$. R: $y = c_1 J_0(e^z) + c_2 N_0(e^z)$

2. Hallar la solución general de la ecuación $z^2y'' + 5zy' + (z^2 + 3)y = 0$.

   R: $y = c_1 z^{-2} J_1(z) + c_2 z^{-2} N_1(z)$

3. Dada la ecuación: $z^2\, y'' + z\, y' + (z^2 - \frac{1}{4})\, y = 0$,

   a) encontrar dos soluciones linealmente independientes alrededor de $z = 0$.

   R: $y = c_1 J_{\frac{1}{2}}(z) + c_2 N_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\{c_1 \operatorname{sen} z - c_2 \cos z\}$

   b) Determinar la solución que satisface $y(\frac{\pi}{4}) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$. R: $y = \sqrt{\dfrac{\pi}{2z}}\{\operatorname{sen} z - \cos z\}$

4. Dada la ecuación: $z\, y'' - (2\alpha - 1)\, y' + z\, y = 0$,

   a) probar que $y(z) = z^\alpha N_\alpha(z)$ es solución.

   b) Hallar la solución general de la ecuación $z\, y'' + 7\, y' + z\, y = 0$.
   R: $y = c_1 z^{-3} J_3(z) + c_2 z^{-3} N_3(z)$

5. Dada la ecuación: $z\, y'' - y' - z\, y = 0$

   a) Encontrar dos soluciones linealmente independientes alrededor de $z = 0$.
   R: $y_1 = z\, I_1(z)$, $y_2 = z\, K_1(z)$

   b) Determinar la solución que satisface las condiciones $y(1) = 1$ y $y(z)$ acotada cuando $z \to \infty$.
   R: $z\, K_1(z)/K_1(1)$, $K_1(1) = 0,6019$

6. Hallar la solución general de la ecuación inhomogénea

$$y'' + \frac{1}{x}\, y' - \frac{(x^2 + 4)}{x^2}\, y = x^4 \ .$$

   `Ayuda:` $W[K_\nu, I_\nu] = 1/x$. R: $y = c_1 I_2(x) + c_2 K_2(x) - x^2(x^2 + 12)$

7. Probar que:

   a) $\int J_0(x) \operatorname{sen} x\, dx = x J_0(x) \operatorname{sen} x - x J_1(x)\, \cos x + c$

   b) $\int x^5 J_2(x)\, dx = 6x^2(8 - x^2)\, J_0(x) - x(x^4 - 24x^2 + 96)\, J_1(x) + c$

1. Demostrar la relación de recurrencia:

$$(2n+1)\,x\,P_n(x) = (n+1)\,P_{n+1}(x) + n\,P_{n-1}(x)$$

`Ayuda: Utilizar` $(1-2xt+t^2)\dfrac{\partial g}{\partial t} = (x-t)g\,.$

2. Para $\ell \neq 0$, demostrar:

$$\int_0^1 P_\ell(x)\,dx = \frac{P_{\ell-1}(0)}{\ell+1} = \begin{cases} 0 & , \quad \ell = 2n \\ \\ \dfrac{(-1)^n\,(2n)!}{2^{2n+1}\,(n+1)!\,n!} & , \quad \ell = 2n+1 \end{cases}$$

`Ayuda: Usar relaciones de recurrencia y propiedades de` $P_\ell(x)$.

3. Evaluar las integrales:

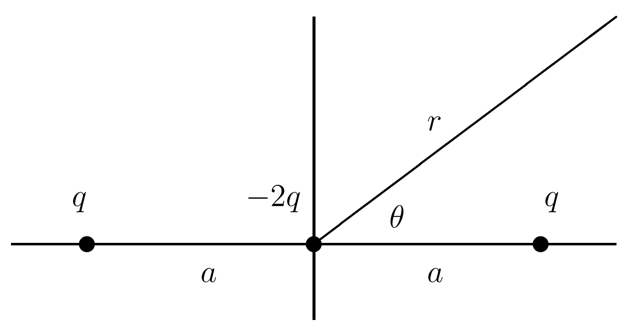
$$\text{a)} \int_{-1}^{1} x^2\,P_\ell(x)\;dx \quad ; \quad \text{b)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\,\mathrm{sen}^2\theta\,\cos\varphi\,Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$

R: a) $\frac{2}{3}\delta_{\ell,0} + \frac{4}{15}\delta_{\ell,2}$, b) $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,\delta_{\ell,1}\,(\delta_{m,-1} - \delta_{m,1})$

4. Probar que el potencial eléctrico producido por el cuadrupolo de la figura a una distancia r del origen ($r > a$), está dado por

$$V(r) = \frac{2q}{r}\sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}(\cos\theta)\,\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}$$

Probar que para $r \gg a$, $V(r) \simeq \dfrac{qa^2}{r^3}\,(3\,\cos^2\theta - 1)$.



1. Demostrar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, x^2 H_n(x)\, H_m(x)\, dx = 2^n\, n!\, \sqrt{\pi}\, \left[(n+2)(n+1)\delta_{m,n+2} + (n+\tfrac{1}{2})\delta_{m,n} + \tfrac{1}{4}\delta_{m,n-2}\right]$$

2. a) Demostrar que los polinomios de Laguerre $L_n(x)$ satisfacen la relación de ortogonalidad:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\, L_m(x)\, L_n(x)\, dx = c_n\, \delta_{m,n}$$

   `Ayuda:` $L_n(x)$ `satisface` $x\, L_n'' + (1-x)\, L_n' + n\, L_n = 0$.

   b) Utilizando la función generadora de los $L_n(x)$ demostrar que $c_n = 1$.

3. Evaluar las integrales:

$$\text{a)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, x^3\, H_n(x)\; dx \quad ; \quad \text{b)} \int_0^{\infty} e^{-x}\, x^3\, L_5(x)\; dx$$

   R: a) $\sqrt{\pi}\,\left(\frac{3}{2}\delta_{n,1} + 6\delta_{n,3}\right)$, b) 0

4. Demostrar qua los polinomios asociados de Laguerre satisfacen:

$$\text{a)}\ L_0^k(x) = 1 \qquad ; \qquad \text{b)}\ L_1^k(x) = (k+1) - x$$

1. Encontrar los autovalores y autovectores del problema de Sturm-Liouville

$$y'' = \lambda\, y \qquad ; \qquad y'(0) = 0 \qquad ; \qquad y(L) = 0$$

R: $\lambda_n = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$, $y_n(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

2. Encontrar los autovalores y autovectores del problema de Sturm-Liouville

$$y'' = \lambda\, y \qquad ; \qquad y'(0) = 0 \qquad ; \qquad y'(L) = 0$$

R: $\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $y_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, (notar que $y_0 = 1$ es autofunción con autovalor $\lambda_0 = 0$.)

3. Encontrar el desarrollo en serie de Legendre de la función

$$f(x) = \begin{cases} a & , \quad -1 < x < 0 \\ \\ b & , \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

R: $f(x) = \dfrac{1}{2}(b+a) + \dfrac{1}{4}(b-a)\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\,(4j+3)\,(2j)!}{2^{2j}(j+1)!\,j!}\,P_{2j+1}(x)$

4. Encontrar el desarrollo en serie de $f(x) = x^3$, $x \in [0,1]$, usando como base el conjunto $\{J_1(\gamma_{1k}x)\}$, con $J_1(\gamma_{1k}) = 0$.

R: $x^3 = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\gamma_{1k}^2 - 8)}{\gamma_{1k}^3\,J_2(\gamma_{1k})}\,J_1(\gamma_{1k}x)$

5. Demostrar que

$$1 - x^2 = 8\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_{0k}x)}{\gamma_{0k}^3\,J_1(\gamma_{0k})}$$

para $x \in [0,1]$.

6. Encontrar el desarrollo en serie de $f(x) = x^m$, $m \geq 1$, $x \in [0,1]$, usando como base el conjunto $\{J_m(\delta_{mk}x)\}$, con $J'_m(\delta_{mk}) = 0$.

R: $x^m = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{mk}\,J_{m+1}(\delta_{mk})}{(\delta_{mk}^2 - m^2)\,[J_m(\delta_{mk})]^2}\,J_m(\delta_{mk}x)$

1. Dos esferas concéntricas de radios a y b ($b > a$) se mantienen a potenciales dados por

$$V\,|_{r=a} = V_0 \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \qquad ; \qquad V\,|_{r=b} = V_0\, \cos^2\theta$$

Determinar el potencial para todo r. V satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$.

2. Encontrar la solución $\psi(t, \rho, \varphi)$ de la ecuación de difusión

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

(α constante) en el interior de un disco de radio a con condición de frontera y condición inicial dadas por

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho}(t, a, \varphi) = 0 \qquad ; \qquad \psi(0, \rho, \varphi) = \rho^2$$

3. Hallar la solución $\psi(t, x, y)$ de la ecuación de ondas

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$$

en una membrana rectangular ($0 \le x \le a,\ \ 0 \le y \le b$), con condiciones de frontera

$$\psi(t, 0, y) = 0 \quad ; \quad \psi(t, a, y) = 0 \quad ; \quad \psi(t, x, 0) = 0 \quad ; \quad \psi(t, x, b) = 0$$

y condiciones iniciales

$$\psi(0, x, y) = xy(a - x)(b - y) \qquad ; \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t}(0, x, y) = 0$$

4. Encontrar la solución $\psi(t, \rho, \varphi)$ de la ecuación de difusión

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

(α constante) en el interior del cuarto de disco definido por: $0 \le \rho \le a$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, con condiciones de frontera

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho}(t, a, \varphi) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}(t, \rho, 0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}(t, \rho, \frac{\pi}{2}) = 0$$

y condición inicial

$$\psi(0, \rho, \varphi) = 1 + \rho^2 \cos 2\varphi$$

5. Encontrar la solución $\psi(t,\rho,\varphi,z)$ de la ecuación de ondas

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

(v constante) en el interior de un cilindro de radio a y altura L ($0\leq\rho\leq a$, $0\leq z\leq L$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$), con condiciones de frontera

$$\psi(t,a,\varphi,z)=0 \quad ; \quad \psi(t,\rho,\varphi,0)=0 \quad ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial z}(t,\rho,\varphi,L)=0$$

y condiciones iniciales

$$\psi(0,\rho,\varphi,z)=\beta \text{ (constante)} \quad ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{t}}(0,\rho,\varphi,\mathrm{z})=0$$

6. El potencial en la superficie de un conductor esférico de radio a está dado por

$$V\,|_{r=a}\begin{cases} V_o & , \quad 0\leq\theta<\alpha \\ \\ 0 & , \quad \alpha<\theta\leq\pi \end{cases}$$

Hallar el potencial que satisface $\nabla^2 V=0$ en el interior y el exterior del conductor.

7. Un cubo de lado b se mantiene a temperatura constante T_o en las paredes $z=0$ y $z=b$, mientras que las paredes restantes se mantienen a temperatura cero. Hallar la temperatura de equilibrio ($\nabla^2 T=0$) en el interior del cubo.

8. Una partícula encerrada en una esfera de radio a satisface la ecuación de Schrödinger

$$\nabla^2\Psi+k^2\Psi=0 \qquad , \qquad k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$$

junto con la condición

$$\Psi\,|_{r=a}=0$$

Probar que la energía mínima necesaria para obtener una solución no-trivial es

$$E_{min}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

Respuestas

1)

$$r < a \quad , \quad V = V_0 \left(\frac{r}{a}\right) \operatorname{sen}\theta\cos\varphi$$

$$a < r < b \quad , \quad V = \frac{1}{3} V_0 \Bigg[\left(\frac{b}{r}\right)\left(\frac{r-a}{b-a}\right) + 3\left(\frac{a}{r}\right)^2 \left(\frac{b^3-r^3}{b^3-a^3}\right) \operatorname{sen}\theta\cos\varphi$$

$$+ \left(\frac{b}{r}\right)^3 \left(\frac{r^5-a^5}{b^5-a^5}\right)(3\cos^2\,\theta - 1)\Bigg]$$

$$r > b \quad , \quad V = \frac{1}{3} V_0 \left(\frac{b}{r}\right)\left[1 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 (3\cos^2\,\theta - 1)\right]$$

2)

$$\psi(t,\rho,\varphi) = \psi(t,\rho) = \frac{a^2}{2} + 4a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha\delta_{0k}^2 t/a^2}}{\delta_{0k}^2 J_0(\delta_{0k})} J_0(\tfrac{\delta_{0k}\rho}{a})$$

3)

$$\psi(t,x,y) = \frac{64a^2b^2}{\pi^6} \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\omega_{jk}t}{(2j+1)^3(2k+1)^3} \operatorname{sen}\tfrac{(2j+1)\pi x}{a} \operatorname{sen}\tfrac{(2k+1)\pi y}{b}$$

$$\omega_{jk} = v\pi\sqrt{\frac{(2j+1)^2}{a^2} + \frac{(2k+1)^2}{b^2}}$$

4)

$$\psi(t,\rho,\varphi) = 1 + 4a^2\cos 2\varphi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha\delta_{2k}^2 t/a^2}}{(\delta_{2k}^2-4)J_2(\delta_{2k})} J_2(\tfrac{\delta_{2k}\rho}{a})$$

5)

$$\psi(t,\rho,\varphi,z) = a^2 \operatorname{sen}\tfrac{3\pi z}{L} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\gamma_{0k}^2-4)\,e^{-\alpha\nu_{0k}t}}{\gamma_{0k}^3\,J_1(\gamma_{0k})} J_0(\tfrac{\gamma_{0k}\rho}{a}) \;+\; \cos 2\varphi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha\nu_{2k}t}}{\gamma_{2k}\,J_3(\gamma_{2k})} J_2(\tfrac{\gamma_{2k}\rho}{a}) \right\}$$

$$\nu_{mk} = \frac{\gamma_{mk}^2}{a^2} + \frac{9\pi^2}{L^2}$$

6)

$$\psi(t,\rho,\varphi,z) = \psi(t,\rho,z) = \frac{8\beta}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\omega_{nk}t}{(2n+1)\,\gamma_{0k}\,J_0'(\gamma_0 k)} \operatorname{sen}\tfrac{(2n+1)\pi z}{2L}\, J_0(\tfrac{\gamma_{0k}\rho}{a})$$

$$\omega_{nk}^2 = \frac{\gamma_{0k}^2}{a^2} + \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$$

7)

$$r < a \quad , \quad V = \frac{V_0}{2}(1-\cos\alpha) + \frac{V_0}{2}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left[P_{\ell-1}(\cos\alpha) - P_{\ell+1}(\cos\alpha)\right]\left(\frac{r}{a}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta)$$

$$r > a \quad , \quad V = \frac{V_0}{2}(1-\cos\alpha)\left(\frac{a}{r}\right) + \frac{V_0}{2}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left[P_{\ell-1}(\cos\alpha) - P_{\ell+1}(\cos\alpha)\right]\left(\frac{a}{r}\right)^{\ell+1} P_\ell(\cos\theta)$$

8)

$$T(x,y,z) = \frac{16T_0}{\pi^2}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{(2j+1)\pi x}{b}\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi y}{b}}{(2j+1)(2k+1)\operatorname{senh} b\nu_{jk}}\left[\operatorname{senh}\nu_{jk}z + \operatorname{senh}\nu_{jk}(b-z)\right]$$

$$\nu_{jk} = \frac{\pi}{b}\sqrt{(2j+1)^2+(2k+1)^2}$$