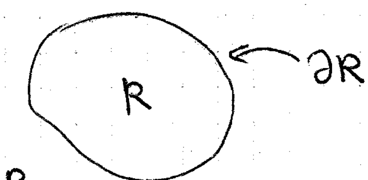
CONDICIONES DE FRONTERA Y UNICIDAD

Estudiaremos los tres ejemplos típicos de EDP elípticas, parabólicas e hiperbólicas.

1) Ec. de Poisson (elíptica)

$$\nabla^2 \psi = F(x,y,z)$$

Usualmente esta ec. se quiere resolver en una cierta región R. Es de esperar que para determinar la solución sea necesario especificar el valor de ψ en la frontera ∂R



Supongamos entonces

$$\psi \Big|_{\partial R} = a(x,y,z) \quad \text{conocida}$$

Potencial especificado en la frontera

condición de frontera tipo Dirichlet

Teorema: la solución de la ec. de Poisson en una región R con condiciones de frontera de Dirichlet es única

Prueba: supongamos que ψ_1 y ψ_2 son dos soluciones (en principio distintas) que satisfacen

$$\nabla^2 \psi_1 = F \quad , \quad \psi_1 \big|_{\partial R} = a$$

$$\nabla^2 \psi_2 = F \quad , \quad \psi_2 \big|_{\partial R} = a$$

Queremos probar que $\psi_1 \equiv \psi_2$ o equivalentemente $\psi_1 - \psi_2 \equiv 0$. Para ver esto se define

$$u = \psi_1 - \psi_2$$

Tenemos $\nabla^2 u = \nabla^2(\psi_1 - \psi_2) = \nabla^2\psi_1 - \nabla^2\psi_2 = 0$

y además $u\big|_{\partial R} = 0$

Queremos probar que $u \equiv 0$ en toda R

Consideremos.

$$\int_R u \, \nabla^2 u \, dV = 0$$

ahora

$$u \, \nabla^2 u = \nabla \cdot (u \nabla u) - \nabla u \cdot \nabla u$$

y por el teorema de Gauss

$$\int_R u \, \nabla^2 u \, dV = \int_{\partial R} u \, \nabla u \cdot \hat{n} \, dS - \int_R (\nabla u)^2 \, dV = 0$$

$\hat{n}$: normal a ∂R

Pero $\int_{\partial R} u \, \nabla u \cdot \hat{n} \, dS = 0$ ya que $u\big|_{\partial R} = 0$

Entonces $\int_R (\nabla u)^2 \, dV = 0 \Rightarrow \nabla u = 0$ en toda R

$\Rightarrow u =$ constante.

Como $u\big|_{\partial R} = 0$ esta constante debe ser cero y se tiene finalmente $u = 0$ en toda R como se quería demostrar.

Otro tipo de condición de frontera común es

$$\hat{n} \cdot \nabla\psi \Big|_{\partial R} = b(x,y,z) \qquad \Big\{ \text{campo eléctrico especificado en la superficie}$$

condición de frontera tipo Neumann

<u>Teorema</u>: la solución de la ec. de Poisson en una región R con condiciones de frontera de Neumann es única excepto por la adición de una constante irrelevante.

prueba: al igual que antes se concluye que

$$\int_{\partial R} u\, \nabla u \cdot \hat{n}\, ds - \int_R (\nabla u)^2\, dV = 0$$

Ahora $\nabla u \cdot \hat{n}\Big|_{\partial R} = 0$ y otra vez se encuentra $\int_R (\nabla u)^2 dV = 0$

$$\Rightarrow \nabla u = 0$$
$$\Rightarrow u = \text{constante en todo } R$$

No se puede concluir que $u = 0$ y entonces $\psi_1 - \psi_2 = \text{constante}$.

OBSERVACIONES

1) Existen también condiciones de frontera tipo Cauchy donde se especifican simultáneamente

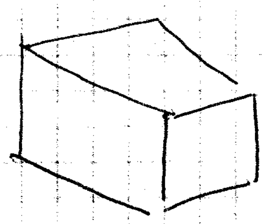
$$\psi \Big|_{\partial R} = a \qquad (1)$$

$$\nabla\psi \cdot \hat{n} \Big|_{\partial R} = b \qquad (2)$$

Esto es una sobreespecificación del problema.
De hecho, sabemos que existe una solución única que satisface (1). En general, esta solución es incompatible con la condición (2) (o viceversa)

2) Si la frontera ∂R es una unión de sub-fronteras.

ej.



entonces en cada sub-frontera se puede tener condiciones tipo Dirichlet o tipo Neumann.

3) Es posible que R no sea acotada, es decir, que una parte de la frontera ∂R se extienda a infinito.
En este caso, para justificar unicidad se necesitan condiciones sobre el comportamiento de ψ en infinito.
Para ver esto, escribimos

$$\partial R = (\partial R)_{acotada} \cup \underset{r \to \infty}{E(r)}$$

donde $E(r)$ es la superficie de un cascarón esférico de radio r

Otra vez, con $u = \Psi_1 - \Psi_2$ es necesario probar que

$$\int_{\partial R} u \, \nabla u \cdot \hat{n} \, dS = 0$$

$$\int_{\partial R} u \, \nabla u \cdot \hat{n} \, ds = \int_{(\partial R)_{acotada}} u \, \nabla u \cdot \hat{n} \, ds + \int_{\substack{E(r) \\ r \to \infty}} u \, \nabla u \cdot \hat{n} \, dS$$

el primer término se anula imponiendo condiciones tipo Dirichlet o Neumann en $(\partial R)_{acotada}$. Para el segundo término

$$\int_{\substack{E(r) \\ r \to \infty}} u \, \nabla u \cdot \hat{n} \, ds = \lim_{r \to \infty} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \operatorname{sen}\theta \; r^2 \, u \frac{\partial u}{\partial r}$$

Si $u \xrightarrow[r \to \infty]{} \dfrac{M}{r^a} \qquad a > \frac{1}{2}$

tenemos

$$r^2 u \frac{\partial u}{\partial r} \xrightarrow[r \to \infty]{} M' \frac{r^2}{r^{2a+1}} \longrightarrow 0$$

Se necesita entonces que ψ satisfaga.

$$\psi \xrightarrow[r \to \infty]{} \frac{M}{r^a} \quad , \; a > \frac{1}{2}$$

2) Ec. de difusión (parabólica)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nabla^2 \psi = F(x,y,z,t)$$

Usualmente se quiere resolver en una región R con frontera ∂R. Es de esperar que se necesite especificar información sobre ψ en ∂R, p. ej.

$$\psi\Big|_{\partial R} = a(x,y,z,t) \qquad \text{Dirichlet}$$

ó $$\nabla\psi\cdot\hat{n}\Big|_{\partial R} = b(x,y,z,t) \qquad \text{Neumann}$$

También es de es esperar que se necesite especificar una condición inicial

$$\psi(x,y,z,t=0) = g(x,y,z)$$

<u>Teorema</u>: La solución de la ec. de difusión con condiciones tipo Dirichlet (o Neumann) y condición inicial es única.

prueba: Sean ψ_1 y ψ_2 dos soluciones con las condiciones impuestas. Entonces, si $u = \psi_1 - \psi_2$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u = 0$$

$$u\Big|_{t=0} = 0 \quad , \quad u\Big|_{\partial R} = 0 \quad \left(\text{o } \nabla u\cdot\hat{n}\Big|_{\partial R} = 0\right)$$

Se quiere probar que $u \equiv 0$. Consideremos

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_R u^2 \, dV$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \int_R \frac{\partial}{\partial t}(u^2) \, dV = \int_R u \frac{\partial u}{\partial t} \, dV = \int_R u \nabla^2 u \, dV$$

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\partial R} u \, \hat{n} \cdot \nabla u \, dV - \int_R (\nabla u)^2 \, dV$$

el primer término se anula por la condición tipo Dirichlet (o Neumann). La conclusión es

$$\frac{dE}{dt} \leq 0 \quad \text{y por definición} \quad E(t) \geq 0$$

Además, $u \big|_{t=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad E(0) = 0$

Si $E(t) \geq 0$, $E(0) = 0$ y $E(t)$ siempre decrece no le queda otra alternativa que anularse idénticamente, i.e. $E(t) \equiv 0 \quad \forall \ t \geq 0$. De la definición de $E(t)$ se deduce entonces que u se anula en toda R $\forall \ t \geq 0$.

3) Ec. de Ondas (hiperbólicas)

$$-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \nabla^2\psi = F(x,y,z,t)$$

Usualmente se quiere resolver en una región R con frontera ∂R. Es de esperar que se necesite especificar información sobre ψ en ∂R, p. ej.

$$\psi\Big|_{\partial R} = a(x,y,z,t) \qquad \text{Dirichlet}$$

ó $$\nabla\psi\cdot\hat{n}\Big|_{\partial R} = b(x,y,z,t) \qquad \text{Neumann}$$

También es de esperar que se necesite especificar el valor inicial de ψ y $\partial\psi/\partial t$, esto es

$$\psi(x,y,z,t)\Big|_{t=0} = g(x,y,z)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,y,z,t)\Big|_{t=0} = h(x,y,z)$$

Teorema: La solución de la ec. de ondas con condiciones tipo Dirichlet (o Neumann) y condiciones iniciales para ψ y $\partial\psi/\partial t$ es única.

prueba: sean ψ_1 y ψ_2 dos soluciones del problema. Para $u = \psi_1 - \psi_2$ se tiene

$$-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\nabla^2 u=0$$

$$u\Big|_{\partial R}=0 \qquad \left(\text{ó} \quad \nabla u\cdot\hat{n}\Big|_{\partial R}=0\right) \qquad \forall\ t$$

$$u\Big|_{t=0}=0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 \qquad \text{en todo } R$$

Consideremos

$$A(t)=\frac{1}{2}\int_R\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dV$$

$$B(t)=\frac{1}{2}\int_R(\nabla u)^2\, dV$$

$$\frac{dA}{dt}=\int_R\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\, dV=v^2\int_R\frac{\partial u}{\partial t}\nabla^2 u\, dV$$

usando la identidad de Green

$$\nabla\cdot(P\,\nabla Q)=(\nabla P)\cdot(\nabla Q)+P\,\nabla^2 Q$$

se obtiene

$$\frac{dA}{dt}=v^2\int_R\nabla\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial t}\nabla u\right)dV-v^2\int_R\nabla\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\cdot\nabla u\, dV$$

$$=v^2\int_{\partial R}\frac{\partial u}{\partial t}\nabla u\cdot\hat{n}\, dV-v^2\,\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_R(\nabla u)^2\, dV$$

el primer término se anula por la condición tipo Neumann. Si hay condiciones Dirichlet también se anula pues

$$u\Big|_{\partial R} = 0 \qquad \forall\ t \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\partial R} = 0$$

Entonces queda

$$\frac{dA}{dt} + v^2 \frac{dB}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A + v^2 B = \text{constante}$$

Pero en $t=0$, $A(0) = 0$ y $B(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad A + v^2 B = A(0) + v^2 B(0) = 0$$

$$A(t) = -v^2 B(t)$$

pero por definición $A \geqslant 0$ y $B \geqslant 0$. Se concluye que

$$A(t) \equiv 0 \qquad \Rightarrow \qquad \partial u/\partial t \equiv 0 \quad \text{en todo } R \quad y \quad \forall\ t$$

$$B(t) \equiv 0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla u \equiv 0 \quad \text{en todo } R \quad y \quad \forall\ t$$

Esto implica

$$u(x,y,z,t) = \text{constante} \qquad \forall\ R \ y \ t$$

pero $u\Big|_{t=0} = 0$ implica que esta constante es idénticamente cero.