

Universidad Central de Venezuela¹

Facultad de Ciencias². Escuela de Física³

Laboratorio de Física Teórica de Sólidos
Centro de Física Teórica y Computacional (CEFITEC)

A. P. 47586. Caracas 1041-A. Venezuela

Métodos Matemáticos de la Física II
Semestre 2003

F. P. Marín G.⁴

Estas notas contienen las tareas y exámenes del semestre 2003, con sus correspondientes soluciones, del curso *Métodos Matemáticos de la Física II* de la Licenciatura en Física. Aunque se han sometido a una revisión reciente es aun posible que el lector encuentre errores. En tal caso le agradecería me notificara tal situación a través de mi correo electrónico.

Noviembre 2006

¹<http://www.ucv.ve/>

²<http://www.ciens.ucv.ve/>

³<http://fisica.ciens.ucv.ve/>

⁴<http://fisica.ciens.ucv.ve/felix/>

felix@fisica.ciens.ucv.ve

Índice general

I	Tareas y Soluciones	1
0.	Repaso	3
0.1.	Programa en C++: solucion0.cc	6
1.	Funciones de Variable Compleja	9
2.	Integración en el Plano Complejo y Funciones Poligammas	13
3.	Conducta Asintótica y Ecuación de Laplace Bidimensional	23
4.	Polinomios de Legendre, Ecuación de Laplace en Tres Dimensiones y Función de Green	35
II	Exámenes y Soluciones	47
1.	Repaso, Funciones de Variable Compleja e Integración en el Plano Complejo	49
1.	<i>Rezagos</i> : Integración en el Plano Complejo y Conducta Asintótica	53
2.	Expansiones Asintóticas y Ecuación de Laplace	59
3.	<i>Examen Final</i> : Ecuación de Laplace en Tres Dimensiones y Delta de Dirac	67
III	Apéndices	71
A.	Evaluación de integrales de la forma $\int_0^\infty dx x^{a-1} Q(x)$	73
A.1.	<i>Sin</i> polos en $\{(x, 0) \mid x > 0\}$	73
A.1.1.	Evaluación	74
A.2.	<i>Con</i> polos simples	76
A.3.	Ejemplos	77
A.3.1.	$\int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{1+x} = ?$, $0 < a < 1$	77
A.3.2.	$P \int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{1-x} = ?$, $0 < a < 1$	78

B. Solución Analítica y Numérica de la Ecuación de Laplace	79
B.1. Introducción	79
B.2. Solución Analítica	80
B.3. Método Numérico	80
Bibliografía	89

Parte I

Tareas y Soluciones

Tarea 0

Repaso

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

19 / 05 / 2003
Prof. Félix Marín
Métodos Matemáticos de la Física II
<http://fisica.ciens.ucv.ve/felix/>
TAREA¹N^o 0

REPASO

SOLUCIÓN

Considere un paraboloides de revolución \mathcal{P}_r y un plano \mathcal{P} los cuales vienen dados por:

$$\mathcal{P}_r = \left\{ (x, y, z) \mid z = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right\}, \quad \mathcal{P} = \{ (x, y, z) \mid x + y + z = 1 \}$$

INTRODUCCIÓN:

La curva \mathcal{C} que resulta ser la intersección de \mathcal{P}_r y \mathcal{P} viene dada por la solución simultánea de las ecuaciones:

$$z = \frac{1}{2} (x^2 + y^2), \quad x + y + z = 1 \quad (0.1)$$

lo cual conduce a $1 - x - y = (x^2 + y^2) / 2$. Esta puede reescribirse en la forma

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4 \quad (0.2)$$

Esta ecuación describe la proyección de la curva \mathcal{C} sobre el plano xy y puede ser parametrizada según $x + 1 = 2 \cos \theta$ e $y + 1 = 2 \sin \theta$ con $0 \leq \theta < 2\pi$. Reemplazando estas expresiones en (0.1), se obtiene una parametrización de la curva \mathcal{C} en términos de θ

$$\begin{aligned} x &= -1 + 2 \cos \theta \\ y &= -1 + 2 \sin \theta & (0 \leq \theta < 2\pi) \\ z &= 3 - 2 (\cos \theta + \sin \theta) \end{aligned} \quad (0.3)$$

¹FECHA DE ENTREGA: **lunes 26 de mayo de 2003.**
No se aceptarán tareas realizadas en computador.

1. Calcule el volumen acotado por \mathcal{P}_r y \mathcal{P} .

SOLUCIÓN:

Este viene dado por

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\mathcal{R}} dx dy \int_{(x^2+y^2)/2}^{1-x-y} dz = \iint_{\mathcal{R}} dx dy \left(1 - x - y - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{R}} dx dy [4 - (x+1)^2 - (y+1)^2] \end{aligned} \quad (0.4)$$

La integración sobre x e y ocurre sobre la región encerrada por la proyección de \mathcal{C} sobre el plano xy (ver expresión (0.2)). Esta es

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \mid (x+1)^2 + (y+1)^2 < 4\}$$

Realizando el cambio de variables $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$ en la expresión (0.4)

$$x = -1 + r \cos \theta, \quad y = -1 + r \sin \theta, \quad 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

se obtiene²

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr r (4 - r^2) = \pi \left(2r^2 - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^2$$

$$V = 4\pi \approx 12,5664$$

(0.5)

2. Calcule la longitud de la curva de intersección de \mathcal{P}_r y \mathcal{P} .

SOLUCIÓN:

Este viene dado por

$$L = \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}$$

(x, y y z corresponden a la parametrización (0.3))

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{4 \sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta - 8 \sin \theta \cos \theta + 4 \cos^2 \theta} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{8 - 4 \sin(2\theta)} = \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} d\theta \sqrt{8 - 4 \sin \theta} = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{2 - \sin \theta} \\ &= 2 \int_0^{\pi} d\theta \left(\sqrt{2 - \sin \theta} + \sqrt{2 + \sin \theta} \right) \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} d\theta \left(\sqrt{2 - \cos \theta} + \sqrt{2 + \cos \theta} \right) \end{aligned}$$

²Note que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

Para completar la evaluación de L , usamos las relaciones[Gradshteyn]

$$\int dx \sqrt{a - b \cos x} = 2 \sqrt{a+b} E(\delta, r) - \frac{2b \operatorname{sen} x}{\sqrt{a - b \cos x}} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a > b > 0 \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$\int dx \sqrt{a + b \cos x} = 2 \sqrt{a+b} E\left(\frac{x}{2}, r\right)$$

y

$$\delta = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{(a+b)(1 - \cos x)}{2(a - b \cos x)}} \right), \quad r = \sqrt{\frac{2b}{a+b}}$$

$E(\varphi, k)$ es la *Integral Elíptica del Segundo Tipo*:

$$E(\varphi, k) \equiv \int_0^\varphi d\alpha \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

En el caso particular del cálculo de L , se tiene que

$$a = 2, \quad b = 1, \quad \implies \quad r = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \sqrt{a+b} = \sqrt{3}, \quad \frac{2b}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\delta|_{x=0} = 0, \quad \delta|_{x=\pi/2} = \frac{\pi}{3},$$

$$L = 8 \sqrt{3} E\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right) - 2 \sqrt{2} + 8 \sqrt{3} E\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$L = 8 \sqrt{3} \left[E\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right) + E\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \right] - 2 \sqrt{2} \approx 20,3038 \quad (0.6)$$

El valor numérico se obtuvo con el programa `solucion0.cc` (ver pág. 6).

3. Calcule el area, sobre el plano \mathcal{P} , encerrada por la curva anterior.

SOLUCIÓN:

Esta viene dada por (\vec{r} es un punto del plano \mathcal{P})

$$A = \int_{\mathcal{R}} dx dy \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right| \quad \text{con} \quad \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + (1 - x - y)\hat{z}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \hat{x} - \hat{z} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \hat{y} - \hat{z} \end{cases} \implies \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$$

Por tanto³

$$A = \int_{\mathcal{R}} dx dy \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \underbrace{\int_{\mathcal{R}} dx dy}_{\pi \times 2^2}$$

³Es obvio, de la expresión que define el plano \mathcal{P} , que $\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$ es un vector normal a tal plano.

$$A = 4\sqrt{3}\pi \approx 21,7656 \quad (0.7)$$

4. Calcule el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(\vec{r}) = z\hat{x} + x\hat{y} + y\hat{z}$ para mover una partícula a lo largo de una revolución, en sentido contrario “ al de las agujas del reloj ”, sobre la curva mencionada arriba. $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$.

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C [F_x(\vec{r}) dx + F_y(\vec{r}) dy + F_z(\vec{r}) dz] = \int_C (z dx + x dy + y dz) \\ &= \int_0^{2\pi} [(3 - 2 \cos \theta - 2 \sin \theta) (-2 \sin \theta d\theta) + (-1 + 2 \cos \theta) (2 \cos \theta d\theta) \\ &\quad + (-1 + 2 \sin \theta) (2 \sin \theta - 2 \cos \theta) d\theta] \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \left(-3 \sin \theta + 2 \cos \theta \sin \theta + 2 \sin^2 \theta \right. \\ &\quad \left. - \cos \theta + 2 \cos^2 \theta \right. \\ &\quad \left. - \sin \theta + \cos \theta + 2 \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \right) \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \left(-4 \sin \theta + 4 \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta \right) = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \left(2 \sin^2 \theta + 2 \right) \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta [3 - \cos(2\theta)] \end{aligned}$$

$$\mathcal{T} = 12\pi \approx 37,6991 \quad (0.8)$$

0.1. Programa en C++: solucion0.cc

El valor numérico obtenido para L (ver expresion (0.6)) se obtuvo con el siguiente programa en C++:

```
// solucion0.cc
#include <cmath>
#include <iostream>
#include <stdexcept>
using namespace std;
double E(double anguloFinal, double k);
```

```

inline double f(double angulo,double k)
{
    k=1.0 - abs(k*sin(angulo));
    return ( k>0 ) ? (sqrt(k)*sqrt(2.0 - k)):0;
}

int main()
{
    doble longitud;

    try
    {
        const double r6s3=sqrt(6.0)/3.0;
        longitud=E(M_PI/3.0,r6s3) + E(M_PI_4,r6s3);
    }
    catch(domain_error) { return (cerr<<"\nError de dominio\n\n",0); }

    longitud=8.0*sqrt(3.0)*longitud - 2.0*M_SQRT2;
    cout<<endl<<"LONGITUD = "<<longitud<<endl<<endl;

    return 0;
}

// Calcula la Integral Eliptica del Segundo Tipo
double E(double anguloFinal,double k) // anguloInicial es = 0
{
    if ( anguloFinal==0 ) return 0;
    if ( k==0 )          return anguloFinal;
    const signed char signo=( anguloFinal<0 ) ?
        ((anguloFinal=(-anguloFinal)),-1):1;
    double dAlpha=0.01;
    size_t n=static_cast<size_t>(anguloFinal/dAlpha + 1.5);
    if ( n<2U ) throw domain_error("");
    dAlpha=(anguloFinal/n)/(1.0 - 1.0/n);

    double suma=(1.0 + f(anguloFinal,k))/2.0;
    for ( anguloFinal=0 ; n>2U ; --n ) suma+=f(anguloFinal+=dAlpha,k);

    return signo*dAlpha*suma;
}

```


Tarea 1

Funciones de Variable Compleja

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

30 / 05 / 2003
Prof. Félix Marín
Métodos Matemáticos de la Física II
<http://fisica.ciens.ucv.ve/felix/>
TAREA¹N^o 1

1. Si a_n y b_n ($n = 1, 2$) son números reales, demuestre que la función

$$f(z) = a_1x + b_1y + c + (a_2x + b_2y)i; \quad z = x + iy, \quad c \text{ es una constante}$$

es una *función entera* si y solamente si los coeficientes son tales que

$$f(z) = (a_1 - ib_1)z + c$$

SOLUCIÓN:

$f(z)$ es una función entera (analítica en todo el plano complejo) si satisface las condiciones de Cauchy-Riemann (en todo el plano complejo) las cuales vienen dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial (a_1x + b_1y + \Re c)}{\partial x} &= \frac{\partial (a_2x + b_2y + \Im c)}{\partial y} \implies a_1 = b_2 \\ \frac{\partial (a_1x + b_1y + \Re c)}{\partial y} &= -\frac{\partial (a_2x + b_2y + \Im c)}{\partial x} \implies b_1 = -a_2 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} f(z) &= a_1x + b_1y + c + (-b_1x + a_1y)i = (a_1 - b_1i)x + (b_1 + a_1i)y + c \\ &= (a_1 - b_1i)x + i(-ib_1 + a_1)y + c = (a_1 - b_1i)(x + iy) + c \end{aligned}$$

Por tanto, $f(z) = (a_1 - ib_1)z + c$ es una condición *necesaria* para que $f(z)$ sea una función entera. Así mismo, también es *suficiente* puesto que

$$\begin{aligned} \frac{\partial (a_1x + b_1y + \Re c)}{\partial x} &= \frac{\partial (a_1y - b_1x + \Im c)}{\partial y} \\ \frac{\partial (a_1x + b_1y + \Re c)}{\partial y} &= -\frac{\partial (a_1y - b_1x + \Im c)}{\partial x} \end{aligned}$$

se satisfacen idénticamente.

¹FECHA DE ENTREGA: **martes 10 de junio de 2003.**
No se aceptarán tareas realizadas en computador.

2. a) En coordenadas polares, $z = r e^{i\theta}$. $r > 0$. $z \in \mathbf{C}$. Encuentre la forma que adoptan, en coordenadas polares, las condiciones de Cauchy-Riemann y la derivada $f'(z)$ para una función analítica dada $f(z)$.

SOLUCIÓN:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= f'(z) e^{i\theta} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= f'(z) r e^{i\theta} i \end{aligned} \right\} \implies ir \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (1.1)$$

Escribamos f en términos de sus componentes real (u) e imaginaria (v): $f = u + iv$. La expresión anterior se reduce al par de condiciones:

Condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas Polares

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad r \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (1.2)$$

Para expresar $f'(z)$ en coordenadas polares usemos, por ejm, el resultado (1.1): $f'(z) = e^{-i\theta} \partial f / \partial r = (-i e^{-i\theta} \partial f / \partial \theta) / r$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \left[\cos(\theta) \frac{\partial u}{\partial r} + \sin(\theta) \frac{\partial v}{\partial r} \right] + \left[-\sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial r} + \cos(\theta) \frac{\partial v}{\partial r} \right] i \\ &= \frac{1}{r} \left[\cos(\theta) \frac{\partial v}{\partial \theta} - \sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] - \frac{1}{r} \left[\sin(\theta) \frac{\partial v}{\partial \theta} + \cos(\theta) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] i \end{aligned} \quad (1.3)$$

- b) Demuestre que $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ y, en consecuencia $e^{-z} = 1/e^z$. $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$. Note que e^Z , con $Z \in \mathbf{C}$, se define a través de una serie infinita: $e^Z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} Z^n / n!$.

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k! (n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{k=0 \\ k \leq n}}^{\infty} \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k! (n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} \end{aligned}$$

Por tanto

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \quad (1.4)$$

Con $z_1 = z$ y $z_2 = -z$ se obtiene

$$\boxed{e^{-z} = \frac{1}{e^z}} \quad (1.5)$$

3. a) Señale por qué la función

$$f_1(z) = e^{-\sqrt{r} \cos(\theta/2)} \left[\cos \left(\sqrt{r} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) - i \operatorname{sen} \left(\sqrt{r} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right] \quad (1.6)$$

con $r > 0$ y $0 < \theta < 2\pi$, es una rama de la función “ bivaluada ” $e^{-\sqrt{z}}$ tal que es analítica en todo el plano complejo salvo en el eje real donde $x \geq 0$.

SOLUCIÓN:

Cuando escribimos z en la forma $z = r e^{i(\theta+2n\pi)}$ (con $r \geq 0$ y $n \in \mathbf{Z}$) se obtiene $\sqrt{z} = \pm \sqrt{r} e^{i\theta/2}$ la cual es una función bivaluada.

La rama del presente ejercicio se define segun:

$$z^{1/2} = r^{1/2} e^{i\theta/2}; \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad r > 0$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} e^{-z^{1/2}} &= e^{-\sqrt{r} e^{i\theta/2}} = e^{-\sqrt{r} [\cos(\theta/2) + i \operatorname{sen}(\theta/2)]} = e^{-\sqrt{r} \cos(\theta/2)} e^{-i \sqrt{r} \operatorname{sen}(\theta/2)} \\ &= e^{-\sqrt{r} \cos(\theta/2)} \left[\cos \left(\sqrt{r} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) - i \operatorname{sen} \left(\sqrt{r} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right], \end{aligned}$$

lo cual es el resultado (1.6).

b) Mostrar que la continuación analítica de $f_1(z)$ desde el primer cuadrante hacia el cuarto cuadrante es la rama

$$f_2(z) = e^{-\sqrt{r} \cos(\theta/2)} \left[\cos \left(\sqrt{r} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) - i \operatorname{sen} \left(\sqrt{r} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right],$$

donde $r > 0$ y $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

SOLUCIÓN:

Ambas representaciones coinciden en el primer cuadrante y ambas son analíticas en sus correspondientes dominios de definición. Por lo tanto, $f_2(z)$ es la continuación analítica de $f_1(z)$. La unicidad de ella puede probarse en forma simple. Ver, por ejm, la referencia [Churchill].

Tarea 2

Integración en el Plano Complejo y Funciones Poligammas

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

10 / 06 / 2003
Prof. Félix Marín
Métodos Matemáticos de la Física II
<http://fisica.ciens.ucv.ve/felix/>
TAREA¹N^o 2

SOLUCIÓN

1. Evalúe las siguientes integrales:

$$\mathcal{I}_0 \equiv \int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{1+x}, \quad \mathcal{I}_1 \equiv \text{P} \int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{1-x}; \quad 0 < a < 1$$

SOLUCIÓN:

Consideremos la evaluación de las integrales

$$\mathcal{I}_\pm \equiv \pm \int_C \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^{a-1}}{z \pm 1}, \quad 0 < a < 1 \quad (2.1)$$

donde C es el camino de integración de la Figura 2.1 y

$$z^{a-1} \equiv |z|^{a-1} e^{i\theta(x,y)(a-1)}; \quad z \equiv x + iy \neq 0, \quad 0 < \theta(x,y) < 2\pi \quad (2.2)$$

A lo largo de C_R : $z = R e^{i\theta}$ y se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\pm \int_{C_R} \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^{a-1}}{z \pm 1} \right) \right| &= \left| \int_{0^+}^{(2\pi)^-} \frac{R e^{i\theta} i d\theta}{2\pi i} \frac{R^{a-1} e^{i\theta(a-1)}}{R e^{i\theta} \pm 1} \right| < \frac{1}{2\pi} \frac{R^a}{R-1} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{R^{a-1}}{1 - 1/R} \end{aligned}$$

¹FECHA DE ENTREGA: viernes 20 de junio de 2003.
No se aceptarán tareas realizadas en computador.

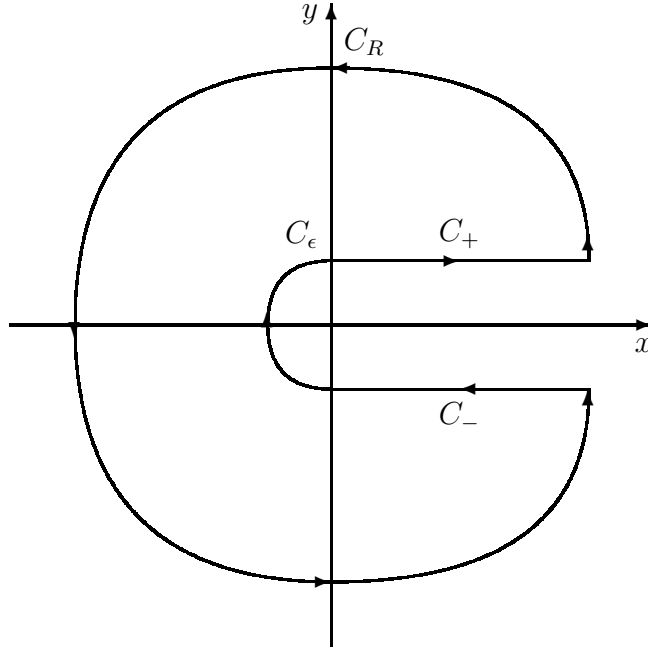


Figura 2.1: Camino de integración $C = C_R \cup C_\epsilon \cup C_+ \cup C_-$ (en sentido contrario al de las agujas del reloj) de la integral (2.1). El camino C_R es la union de arcos de radio $R > 1$. El camino C_ϵ es una semicircunferencia de radio $\epsilon < 1$. C_\pm son paralelos al eje x .

Puesto que $a < 1$, se cumple que $\lim_{R \rightarrow \infty} [R^{a-1} / (1 - 1/R)] = 0$ y por lo tanto

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\pm \int_{C_R} \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^{a-1}}{z \pm 1} \right) = 0 \quad (2.3)$$

A lo largo de C_ϵ : $z = \epsilon e^{i\theta}$ y se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\pm \int_{C_\epsilon} \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^{a-1}}{z \pm 1} \right) \right| &= \left| \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \frac{\epsilon e^{i\theta} i d\theta}{2\pi i} \frac{\epsilon^{a-1} e^{i\theta(a-1)}}{\epsilon e^{i\theta} \pm 1} \right| < \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon^a}{1 - \epsilon} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \frac{\epsilon^a}{1 - \epsilon} \end{aligned}$$

Puesto que $a > 0$, se cumple que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \{\epsilon^a / [2(1 - \epsilon)]\} = 0$ y por lo tanto

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\pm \int_{C_\epsilon} \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^{a-1}}{z \pm 1} \right) = 0 \quad (2.4)$$

Usando los resultados (2.3) y (2.4), se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\pm \int_C \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^{a-1}}{z \pm 1} \right) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\pm \int_{C_+} \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^{a-1}}{z \pm 1} \right) \\ &+ \\ &\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\pm \int_{C_-} \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^{a-1}}{z \pm 1} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Evaluación de $\mathcal{I}_0 = \int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{x+1}$:

Usando el resultado *con el signo +* en (2.5), observaremos que la integral tiene un polo, *dentro* del contorno de integración, igual a $-1 = e^{i\pi}$. Por tanto

$$\begin{aligned}
 e^{i\pi(a-1)} &= -e^{i\pi a} = \overbrace{\int_0^\infty \frac{dx}{2\pi i} \frac{x^{a-1}}{x+1}}^{a \text{ lo largo de } C_+} + \overbrace{\int_\infty^0 \frac{dx}{2\pi i} \frac{x^{a-1} e^{2\pi(a-1)i}}{x e^{2\pi i} + 1}}^{a \text{ lo largo de } C_-} \\
 &= \int_0^\infty \frac{dx}{2\pi i} \frac{x^{a-1}}{x+1} - e^{2\pi a i} \int_0^\infty \frac{dx}{2\pi i} \frac{x^{a-1}}{x+1} = (1 - e^{2\pi a i}) \int_0^\infty \frac{dx}{2\pi i} \frac{x^{a-1}}{x+1}
 \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{x+1} = \frac{2\pi i e^{\pi a i}}{e^{2\pi a i} - 1} = \frac{2\pi i}{e^{\pi a i} - e^{-\pi a i}} = \frac{2\pi i}{2i \operatorname{sen}(\pi a)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi a)}$$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{x+1} = \pi \operatorname{cosec}(\pi a), \quad 0 < a < 1$$

(2.6)

Evaluación de $\mathcal{I}_1 = \text{P} \int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{1-x}$:

Usando el resultado *con el signo -* en (2.5), observaremos que la integral no tiene polos *dentro* del contorno de integración. Por tanto²

$$\begin{aligned}
 0 &= -\overbrace{\int_0^\infty \frac{dx}{2\pi i} \frac{x^{a-1}}{(x+i0^+) - 1}}^{a \text{ lo largo de } C_+} + \overbrace{\left[-\int_\infty^0 \frac{dx}{2\pi i} \frac{x^{a-1} e^{2\pi(a-1)i}}{(x-i0^+) - 1} \right]}^{a \text{ lo largo de } C_-} \\
 &= \int_0^\infty \frac{dx}{2\pi i} \frac{x^{a-1}}{1-x-i0^+} - e^{2\pi a i} \int_0^\infty \frac{dx}{2\pi i} \frac{x^{a-1}}{1-x+i0^+}
 \end{aligned}$$

²Aquí usamos las identidades

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b dx' \frac{f(x')}{x' - x \pm i\epsilon} \equiv \int_a^b dx' \frac{f(x')}{x' - x \pm i0^+} = \text{P} \int_a^b dx' \frac{f(x')}{x' - x} \mp i\pi f(x) \Theta(x-a) \Theta(b-x)$$

$a < b$ y $f(x)$ no tiene polos en (a, b) .

Note que cuando $x < a$ o $x > b$ es irrelevante el uso de la parte principal y

$$\int_a^b dx' \frac{f(x')}{x' - x \pm i0^+} = \int_a^b dx' \frac{f(x')}{x' - x}; \quad x \notin [a, b], \quad f(x) \text{ no tiene polos en } (a, b).$$

Simbólicamente u *operacionalmente* escribimos

$$\frac{1}{x \pm i0^+} = \text{P}\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\text{P} \int_0^\infty \frac{dx}{2\pi i} \frac{x^{a-1}}{1-x} + \frac{1}{2} \right] - e^{2\pi ai} \left[\text{P} \int_0^\infty \frac{dx}{2\pi i} \frac{x^{a-1}}{1-x} - \frac{1}{2} \right] \\
&= \frac{1 - e^{2\pi ai}}{2\pi i} \text{P} \int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{1-x} + \frac{1 + e^{2\pi ai}}{2} \\
&= e^{\pi ai} \left(\frac{e^{-\pi ai} - e^{\pi ai}}{2\pi i} \text{P} \int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{1-x} + \frac{e^{-\pi ai} + e^{\pi ai}}{2} \right) \\
&= e^{\pi ai} \left[-\frac{\text{sen}(\pi a)}{\pi} \text{P} \int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{1-x} + \cos(\pi a) \right]
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\text{P} \int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{1-x} = \pi \frac{\cos(\pi a)}{\text{sen}(\pi a)}$$

$$\text{P} \int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{1-x} = \pi \cotan(\pi a), \quad 0 < a < 1$$

(2.7)

2. Evalúe la integral

$$\mathcal{I}_2 \equiv \int_0^\infty dx \frac{x^{-p}}{1 + 2x \cos \lambda + x^2}; \quad -1 < p < 1, \quad -\pi < \lambda < \pi$$

SOLUCIÓN:

Consideremos la integral

$$\mathcal{I} \equiv \int_C dz \frac{z^{-p}}{1 + 2z \cos \lambda + z^2}; \quad \begin{cases} z^{-p} = |z|^{-p} e^{-i\theta(x,y)p} \\ 0 < \theta(x,y) < 2\pi \\ z \equiv x + iy \neq 0 \end{cases}$$

C es el contorno de integración de la Figura 2.1. Los polos del integrando de \mathcal{I} vienen dados por los *ceros* de $1 + 2z \cos \lambda + z^2$:

$$\begin{aligned}
z_\pm &= \frac{-2 \cos \lambda \pm \sqrt{4 \cos^2 \lambda - 4}}{2} = -\cos \lambda \pm i \text{sen} \lambda = -(\cos \lambda \mp i \text{sen} \lambda) = -e^{\mp i\lambda} \\
&= e^{i(\pi \mp \lambda)}
\end{aligned}$$

Note que $|z_\pm| = 1$ y, puesto que $|\lambda| < \pi$, z_\pm nunca se encuentra sobre el semieje real positivo.

Usando el *Teorema de los Residuos* en la evaluación de \mathcal{I} , obtendremos

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_C dz \frac{z^{-p}}{(z - z_+)(z - z_-)} = 2\pi i \left(\frac{z_+^{-p}}{z_+ - z_-} + \frac{z_-^{-p}}{z_- - z_+} \right) = 2\pi i \frac{z_+^{-p} - z_-^{-p}}{z_+ - z_-} \\
&= 2\pi i \frac{e^{i(\pi-\lambda)(-p)} - e^{i(\pi+\lambda)(-p)}}{2i \text{sen} \lambda} = \pi e^{-ip\pi} \frac{e^{ip\lambda} - e^{-ip\lambda}}{\text{sen} \lambda} = \pi e^{-ip\pi} \frac{2i \text{sen}(p\lambda)}{\text{sen} \lambda}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{I} = \int_C dz \frac{z^{-p}}{1 + 2z \cos \lambda + z^2} = 2\pi i e^{-ip\pi} \frac{\text{sen}(p\lambda)}{\text{sen} \lambda}$$

Completando³ las integrales remanentes en los límites $\epsilon \rightarrow 0^+$ y $R \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} 2\pi i e^{-ip\pi} \frac{\text{sen}(p\lambda)}{\text{sen} \lambda} &= \int_0^\infty dx \frac{x^{-p}}{1 + 2x \cos \lambda + x^2} + \int_\infty^0 dx \frac{x^{-p} e^{-2p\pi i}}{1 + 2x \cos \lambda + x^2} \\ &= (1 - e^{-2p\pi i}) \int_0^\infty dx \frac{x^{-p}}{1 + 2x \cos \lambda + x^2} \\ &= e^{-ip\pi} (e^{ip\pi} - e^{-ip\pi}) \int_0^\infty dx \frac{x^{-p}}{1 + 2x \cos \lambda + x^2} \\ &= 2i e^{-ip\pi} \text{sen}(p\pi) \int_0^\infty dx \frac{x^{-p}}{1 + 2x \cos \lambda + x^2} \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{-p}}{1 + 2x \cos \lambda + x^2} = \frac{\pi}{\text{sen}(p\pi)} \frac{\text{sen}(p\lambda)}{\text{sen} \lambda}; \quad -1 < p < 1, \quad -\pi < \lambda < \pi \quad (2.8)$$

3. Use, en general, la familia de funciones poligammas para encontrar el *valor numérico* de la serie

$$\mathcal{S}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)(3n+1)(4n+1)^3}$$

SOLUCIÓN:

Reescribamos la serie en la forma

$$\mathcal{S}_0 = \frac{1}{384} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+1/2)(n+1/3)(n+1/4)^3}$$

Realizemos la siguiente *descomposición*:

$$\frac{1}{(n+1)(n+1/2)(n+1/3)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+1/2} + \frac{C}{n+1/3}$$

donde

$$A = \left. \frac{1}{(n+1/2)(n+1/3)} \right|_{n=-1} = 3$$

$$B = \left. \frac{1}{(n+1)(n+1/3)} \right|_{n=-1/2} = -12$$

$$C = \left. \frac{1}{(n+1)(n+1/2)} \right|_{n=-1/3} = 9$$

³Las integraciones a lo largo de C_R y C_ϵ se anulan en los límites $\epsilon \rightarrow 0^+$ y $R \rightarrow \infty$ en forma análoga al problema anterior. El lector debe verificar, *en detalle*, esta aseveración. En consecuencia, las integraciones remanentes ocurren *a lo largo* de C_\pm .

\mathcal{S}_0 puede reescribirse como

$$\mathcal{S}_0 = \frac{1}{128} F\left(1, \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{32} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{128} F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$$

donde

$$F(z_0, z_1) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z_0)(n+z_1)^3}; \quad z_0, z_1 \in \mathbf{C}, \quad z_0, z_1 \neq 0, -1, -2, \dots$$

$F(z_0, z_1)$ puede evaluarse a partir de la identidad⁴

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z_0)(n+z_1)} = \frac{\Psi(z_0) - \Psi(z_1)}{z_0 - z_1}; \quad z_0, z_1 \in \mathbf{C}, \quad z_0, z_1 \neq 0, -1, -2, \dots$$

$\Psi(z)$ es la *función Digamma*. Detalles sobre esta función pueden consultarse en la referencia del pie de página 4.

$$F(z_0, z_1) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z_0)(n+z_1)} = \frac{\Psi''(z_1)}{2(z_1 - z_0)} - \frac{\Psi'(z_1)}{(z_1 - z_0)^2} + \frac{\Psi(z_1) - \Psi(z_0)}{(z_1 - z_0)^3}$$

$$\begin{aligned} F\left(1, \frac{1}{4}\right) &= \frac{\Psi''(1/4)}{2(1/4 - 1)} - \frac{\Psi'(1/4)}{(1/4 - 1)^2} + \frac{\Psi(1/4) - \Psi(1)}{(1/4 - 1)^3} \\ &= -\frac{2}{3} \Psi''\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{16}{9} \Psi'\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{64}{27} \left[\Psi\left(\frac{1}{4}\right) - \Psi(1) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) &= \frac{\Psi''(1/4)}{2(1/4 - 1/2)} - \frac{\Psi'(1/4)}{(1/4 - 1/2)^2} + \frac{\Psi(1/4) - \Psi(1/2)}{(1/4 - 1/2)^3} \\ &= -2\Psi''\left(\frac{1}{4}\right) - 16\Psi'\left(\frac{1}{4}\right) - 64 \left[\Psi\left(\frac{1}{4}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) &= \frac{\Psi''(1/4)}{2(1/4 - 1/3)} - \frac{\Psi'(1/4)}{(1/4 - 1/3)^2} + \frac{\Psi(1/4) - \Psi(1/2)}{(1/4 - 1/3)^3} \\ &= -6\Psi''\left(\frac{1}{4}\right) - 144\Psi'\left(\frac{1}{4}\right) - 1728 \left[\Psi\left(\frac{1}{4}\right) - \Psi\left(\frac{1}{3}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \left(-\frac{1}{192} + \frac{1}{16} - \frac{9}{64}\right) \Psi''\left(\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{72} + \frac{1}{2} - \frac{27}{8}\right) \Psi'\left(\frac{1}{4}\right) \\ &+ \left(-\frac{1}{54} + 2 - \frac{81}{2}\right) \Psi\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{54} \Psi(1) - 2\Psi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{81}{2} \Psi\left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

⁴Ver **8.363.3** en *Table of Integrals, Series and Products*. I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik. Academic Press 1965.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_0 &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)(3n+1)(4n+1)^3} \\
&= -\frac{1040}{27} \Psi\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{81}{2} \Psi\left(\frac{1}{3}\right) - 2\Psi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{54} \Psi(1) - \frac{26}{9} \Psi'\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{12} \Psi''\left(\frac{1}{4}\right)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Con este resultado procedemos a calcular el *valor numérico* de la serie \mathcal{S}_0 . Para ello, usamos [Abramowitz] donde tablas para algunas de las funciones Poligammas están tabuladas en el intervalo $[1, 2]$. Para ello es necesario usar las *fórmulas de recurrencia*[Abramowitz]⁵:

$$\begin{aligned}
\Psi(z) &= \Psi(z+1) - \frac{1}{z} \\
\Psi'(z) &= \Psi'(z+1) + \frac{1}{z^2} \\
\Psi''(z) &= \Psi''(z+1) - \frac{2}{z^3}
\end{aligned}$$

$$\Psi\left(\frac{1}{4}\right) = \overbrace{\Psi\left(\frac{5}{4}\right)}^{\approx -0,22745 \ 35334} - 4 = -4,22745 \ 35334$$

$$\Psi\left(\frac{1}{3}\right) = \overbrace{\Psi\left(\frac{4}{3}\right)}^{\approx -0,13020 \ 93416} - 3 = -3,13020 \ 93416$$

$$\Psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2 \ln 2 = -1,96351 \ 00260 \ 21423 \dots$$

$$\Psi(1) = -\gamma = -0,57721 \ 56649 \dots$$

$$\Psi'\left(\frac{1}{4}\right) = \overbrace{\Psi'\left(\frac{5}{4}\right)}^{\approx 1,19732 \ 91545} + 16 = 17,19732 \ 91545$$

$$\Psi''\left(\frac{1}{4}\right) = \overbrace{\Psi''\left(\frac{5}{4}\right)}^{\approx -1,32773 \ 99375} - 128 = -129,32773 \ 99375$$

⁵Ver [Abramowitz]:

$$\Psi^{(n)}(z) = \Psi^{(n)}(z+1) - (-1)^n n! z^{-n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad \Psi^{(0)}(z) \equiv \Psi(z)$$

Con estos valores numéricos⁶ y el resultado (2.9) se obtiene

$$\mathcal{S}_0 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)(3n+1)(4n+1)^3} = 1,07410219783266 \quad (2.10)$$

4. Una *corrección* a la *Fórmula de Stirling* para la función *Gamma* es de la forma:

$$\Gamma(z) \approx e^{-z} z^{z-1/2} \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{A}{z}\right); \quad |z| \rightarrow \infty, \quad |\arg(z)| < \pi \quad (2.11)$$

donde $A \in \mathbf{R}$ y es independiente de z .

Exigiendo que la expresión (2.11) sea consistente con la relación de recurrencia

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (2.12)$$

determine el valor de A .

SOLUCIÓN:

(2.11) debe satisfacer la relación de recurrencia (2.12). Ello significa que

$$e^{-(z+1)} (z+1)^{z+1/2} \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{A}{z+1}\right) \sim z \left[e^{-z} z^{z-1/2} \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{A}{z}\right) \right], \quad |z| \rightarrow \infty$$

Simplifiquemos esta expresión:

$$e^{-1} (z+1)^{z+1/2} \frac{z+1+A}{z+1} \sim z^{z+1/2} \frac{z+A}{z}, \quad |z| \rightarrow \infty$$

$$e^{-1} (z+1)^{z-1/2} (z+1+A) \sim z^{z-1/2} (z+A), \quad |z| \rightarrow \infty$$

$$e^{-1} (z+1)^{z+1/2} + e^{-1} (z+1)^{z-1/2} A \sim z^{z+1/2} + z^{z-1/2} A, \quad |z| \rightarrow \infty$$

$$\left[e^{-1} (z+1)^{z-1/2} - z^{z-1/2} \right] A \sim z^{z+1/2} - e^{-1} (z+1)^{z+1/2}, \quad |z| \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} A &\sim \frac{z^{z+1/2} - e^{-1} (z+1)^{z+1/2}}{e^{-1} (z+1)^{z-1/2} - z^{z-1/2}} = \frac{z^{z+1/2} \left[1 - e^{-1} (1+1/z)^{z+1/2} \right]}{z^{z-1/2} \left[e^{-1} (1+1/z)^{z-1/2} - 1 \right]} \\ &= -z \frac{e^{(z+1/2)\ln(1+1/z)-1} - 1}{e^{(z-1/2)\ln(1+1/z)-1} - 1}, \quad |z| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.13)$$

En el límite $|z| \rightarrow \infty$, se obtiene⁷

$$\left(z + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{z}\right) - 1 \approx \left(z + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3}\right) - 1$$

⁶ $\gamma \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N \right) = 0,57721\ 56649 \dots$ es la *constante de Euler*.

⁷Note que $\ln(1+Z) = Z - \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^3}{3} - \dots$. $Z \in \mathbf{C}$. $|Z| \leq 1$ y $Z \neq -1$.

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{1}{2z} + \frac{1}{3z^2}\right) + \left(\frac{1}{2z} - \frac{1}{4z^2} + \frac{1}{6z^3}\right) - 1 \\
&\approx \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{z^2} = \frac{1}{12z^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(z - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right) - 1 &\approx \left(z - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3}\right) - 1 \\
&= \left(1 - \frac{1}{2z} + \frac{1}{3z^2}\right) + \left(-\frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^2} - \frac{1}{6z^3}\right) - 1 \approx -\frac{1}{z}
\end{aligned}$$

Reemplazando estos resultados en la expresión (2.13), se obtiene

$$A = -z \frac{1/(12z^2)}{-1/z} = \frac{1}{12}, \quad |z| \rightarrow \infty$$

Por tanto

$$\Gamma(z) \approx e^{-z} z^{z-1/2} \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{1}{12z}\right); \quad |z| \rightarrow \infty, \quad |\arg(z)| < \pi \quad (2.14)$$

Tarea 3

Conducta Asintótica y Ecuación de Laplace Bidimensional

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

22 / 07 / 2003
Prof. Félix Marín
Métodos Matemáticos de la Física II
<http://fisica.ciens.ucv.ve/felix/>
TAREA¹N^o 3

SOLUCIÓN

1. Encuentre una expresión asintótica para la integral

$$\int_0^{\infty} dx \frac{e^{-x/\lambda}}{\sqrt{x^2 + a^2}}; \quad \lambda, a \in \mathbf{R}, \quad \lambda > 0, \quad a \neq 0 \quad (3.1)$$

en los casos límites $\lambda \ll |a|$ y $\lambda \gg |a|$. Discuta la convergencia de las correspondientes series.

SOLUCIÓN:

$$0 < \lambda \ll |a|$$

Realizando el cambio de variables $x \rightarrow x/|a|$, se obtiene

$$\int_0^{\infty} dx \frac{e^{-x/\Lambda}}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad \Lambda \equiv \frac{\lambda}{|a|} \gtrsim 0$$

La contribución del factor $e^{-x/\Lambda}$ proviene de la región $x \lesssim \Lambda \gtrsim 0$. Por tanto, solo es necesario considerar, en la raíz cuadrada del denominador, valores de $x \sim 0$. La versión más simple se obtiene con la *asignación* $x = 0$ en el denominador del integrando y resulta ser:

$$\int_0^{\infty} dx \frac{e^{-x/\Lambda}}{\sqrt{x^2 + 1}} \sim \int_0^{\infty} dx \frac{e^{-x/\Lambda}}{\sqrt{0^2 + 1}} = \Lambda$$

¹FECHA DE ENTREGA: **viernes 01 de agosto de 2003.**
No se aceptarán tareas realizadas en computador.

En realidad, ello significa que estamos usando el primer término del desarrollo, en potencias de x , de $(1+x^2)^{-1/2}$. Tal expansión solo es válida cuando $|x| < 1$. Por tanto, antes de realizar la evaluación debemos separar la integral en dos integrales a lo largo de $(0, 1)$ y $(1, \infty)$:

$$\int_0^\infty dx \frac{e^{-x/\Lambda}}{\sqrt{1+x^2}} = \int_0^1 dx \frac{e^{-x/\Lambda}}{\sqrt{x^2+1}} + \int_1^\infty dx \frac{e^{-x/\Lambda}}{\sqrt{1+x^2}}$$

Es obvio que, en el segundo miembro, la primera integral representa la contribución mas importante puesto que:

$$\frac{\int_1^\infty dx e^{-x/\Lambda} / \sqrt{1+x^2}}{\int_0^1 dx e^{-x/\Lambda} / \sqrt{x^2+1}} < \frac{\int_1^\infty dx e^{-x/\Lambda} / \sqrt{2}}{\int_0^1 dx e^{-x/\Lambda} / \sqrt{2}} = \frac{e^{-1/\Lambda}}{1 - e^{-1/\Lambda}} \sim e^{-1/\Lambda} \ll 1$$

Por tanto

$$\int_0^\infty dx \frac{e^{-x/\Lambda}}{\sqrt{1+x^2}} \sim \int_0^1 dx \frac{e^{-x/\Lambda}}{\sqrt{x^2+1}} \quad (3.2)$$

Expresemos $(1+x^2)^{-1/2}$ como una serie de potencias, la cual es válida cuando $|x| < 1$, en x :

$$(1+x^2)^{-1/2} \Big|_{|x|<1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overbrace{\Gamma(1/2)}^{\sqrt{\pi}}}{n! \Gamma(1/2-n)} x^{2n}$$

donde $\Gamma(z)$ es la *función Gamma*[Abramowitz]. Usando la *fórmula de reflexión para la función Gamma*[Abramowitz] podemos observar que:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi[1/2+n]) \Gamma(1/2+n)} = (-1)^n \frac{\pi}{\Gamma(1/2+n)}, \quad n \in \mathbf{Z}$$

y, usando la *propiedad recursiva de la función Gamma*[Abramowitz]

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right) \left(n-\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) = \dots \\ &= \left(n-\frac{1}{2}\right) \left(n-\frac{3}{2}\right) \dots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n} (2n-1)(2n-3)\dots 1 \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\dots 2}{2n(2n-2)\dots 2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{n!} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = (-1)^n 2^{2n} \frac{n!}{(2n)!} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \implies (1+x^2)^{-1/2} \Big|_{|x|<1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^{2n}$$

Realizando una integración *término a término* en la expresión (3.2):

$$\int_0^\infty dx \frac{e^{-x/\Lambda}}{\sqrt{1+x^2}} \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \int_0^1 dx e^{-x/\Lambda} x^{2n}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \left(\int_0^{1/\Lambda} dx e^{-x} x^{2n} \right) \Lambda^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \left[\underbrace{\int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{2n}}_{(2n)!} - \underbrace{\int_{1/\Lambda}^{\infty} dx e^{-x} x^{2n}}_{\approx 0} \right] \Lambda^{2n+1}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\boxed{
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} dx \frac{e^{-x/\Lambda}}{\sqrt{1+x^2}} &\sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \left[\frac{(2n)!}{n!} \right]^2 \Lambda^{2n+1} \\
&= \Lambda - \Lambda^3 + 9\Lambda^5 - \dots, \quad 0 \lesssim \Lambda \equiv \frac{\lambda}{|a|} \ll 1
\end{aligned}
} \tag{3.3}$$

Una *condición necesaria* para la convergencia[Rudin] de la serie (3.3) es que el término general de la serie se anule cuando $n \rightarrow \infty$. Revisemos si esta condición se cumple²:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \left[\frac{(2n)!}{n!} \right]^2 \Lambda^{2n+1} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{2n}} \left[\frac{\sqrt{2\pi} (2n)^{2n+1/2} e^{-2n}}{\sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}} \right]^2 |\Lambda|^{2n+1} \\
&= \sqrt{2} |\Lambda| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n |\Lambda|^2}{e} \right)^n
\end{aligned}$$

Esta expresión se anula solo si Λ se anula idénticamente. La serie (3.3) es asintótica y su utilidad se reduce al uso de *los primeros términos* como resultado aproximado o/y como una expresión de la *conducta* de la integral cuando $\Lambda \gtrsim 0$. Por ejm..., $\sim \Lambda - \Lambda^3 + 9\Lambda^5$.

$$\boxed{\lambda \gg |a| \gtrsim 0}$$

Con la definición $\alpha \equiv |a|/\lambda$, la integral (3.1) puede escribirse en la forma:

$$\int_0^{\infty} dx \frac{e^{-x/\lambda}}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int_0^{\infty} dx \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}; \quad \alpha = \frac{|a|}{\lambda}, \quad 0 < \alpha \ll 1 \tag{3.4}$$

Si realizamos la *asignación* $\alpha = 0$ en la integral (3.4) podemos observar que esta presenta una *divergencia logarítmica en el origen*:

$$\int_0^{\infty} dx \left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} \right)_{\alpha=0} \sim - \int \frac{dx}{x} \sim - \ln x$$

²Aquí usamos la *fórmula de Stirling* $N! \approx \sqrt{2\pi} N^{N+1/2} e^{-N}$ cuando $N \gg 1$.

Es conveniente realizar una integración por partes, en (3.4), para *aislar* la divergencia logarítmica:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dx \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} &= \int_0^\infty dx e^{-x} \frac{d \ln \left(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2} \right)}{dx} \\
&= \ln \left(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2} \right) e^{-x} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty dx \ln \left(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2} \right) \left(-e^{-x} \right) \\
&= -\ln \alpha + \int_0^\infty dx e^{-x} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2} \right)
\end{aligned}$$

La aproximación mas simple se obtiene con la *asignación* $\alpha = 0$ en el integrando del segundo miembro. La integral (3.4) es reescrita convenientemente en la forma

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dx \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} &= -\ln \alpha + \int_0^\infty dx \ln(2x) e^{-x} \\
&+ \int_0^\infty dx \left[\ln \left(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2} \right) - \ln(2x) \right] e^{-x} \\
&= -\ln \left(\frac{1}{2} \alpha \right) + \int_0^\infty dx \ln(x) e^{-x} \\
&+ \int_0^\infty dx \left[\ln \left(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2} \right) - \ln(2x) \right] e^{-x}
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dx \ln(x) e^{-x} &= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{d}{dn} \int_0^\infty dx x^n e^{-x} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{d\Gamma(n+1)}{dn} = \Gamma'(1) \\
&= \overbrace{\Gamma(1)}^1 \Psi(1), \quad \Psi(1) = -\gamma
\end{aligned}$$

$\Psi(z) \equiv d \ln \Gamma(z) / dz$ es la *función digamma* y

$$\gamma \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N \right) = 0,5772 \ 1566 \ 4901 \ 5325 \dots$$

es la *constante de Euler-Mascheroni* [Gradshteyn, Torres]. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dx \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} &= -\ln \left(\frac{1}{2} \alpha \right) - \gamma \\
&+ \int_0^\infty dx \left[\ln \left(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2} \right) - \ln(2x) \right] e^{-x} \quad (3.5)
\end{aligned}$$

tal que la aproximación mas simple de la integral (3.1) resulta ser:

$$\int_0^\infty dx \frac{e^{-x/\lambda}}{\sqrt{x^2 + a^2}} \sim \ln \left(\frac{2\lambda}{|a|} \right) - \gamma, \quad \lambda \gg |a| \gtrsim 0 \quad (3.6)$$

Ver por ejm, [Bleistein], [Erdelyi] y [Murray] (entre otros) en relación con la *expansión asintótica de integrales*.

2. Encuentre una expresión asintótica cuando $|x| \rightarrow \infty$ para la solución de la ecuación diferencial

$$-\epsilon^2 \varphi''(x) + gx^4 \varphi(x) = E\varphi(x); \quad \epsilon \gtrsim 0, \quad g > 0 \quad (3.7)$$

E es un autovalor del operador diferencial $-\epsilon^2 d^2/dx^2 + gx^4$. $E > 0$ y finito.

SOLUCIÓN:

Con base en la magnitud *pequeña* del parámetro ϵ , se puede estar tentado a ensayar una solución de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \epsilon^n$. Ello supone, además, que $\epsilon^2 |\varphi''(x)| \ll gx^4 |\varphi(x)|$ lo cual es cierto si $\varphi(x)$ *varia suavemente* a lo largo de x . Una estimación de la certeza de esta condición toma la forma

$$\epsilon^2 \frac{\varphi''(x)}{x^2} \ll gx^4 \varphi(x) \quad \implies \quad |x| \gg \frac{\epsilon^{1/3}}{g^{1/6}}$$

lo cual muestra que la condición *favorece* valores de x que tal que gx^4 *varia suavemente*: $|(1/gx^4) d(gx^4)/dx| = 4/|x| \ll 4g^{1/6}/\epsilon^{1/3}$.

Esta situación corresponde a un caso de *teoría de perturbación singular* que se caracteriza por la propiedad:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \varphi(x, \epsilon) \neq \varphi(x, \epsilon)|_{\epsilon=0}$$

donde $\varphi(x, \epsilon)$ es una solución de la Ec. (3.7). En general, al considerar este problema se realiza un cambio de variables cuyo propósito principal es *remover* la conducta singular debido a la presencia del parámetro ϵ . Con esta introducción es claro el procedimiento que a continuación se muestra.

La presencia del factor ϵ^2 que multiplica a $\varphi''(x)$ en la ecuación diferencial sugiere el cambio de variables $\varphi(x) \rightarrow S(x, \epsilon)$:

$$\varphi(x) \equiv e^{iS(x, \epsilon)/\epsilon}$$

La motivación, al escoger esta forma para $\varphi(x)$, es *eliminar* el factor multiplicativo ϵ^2 en la ecuación diferencial. Una vez *eliminado* este factor, se procede a estudiar el desarrollo, en potencias de ϵ , de $S(x, \epsilon)$.

$$\varphi'(x) = e^{iS(x, \epsilon)/\epsilon} \frac{i}{\epsilon} S'(x, \epsilon) = \frac{i}{\epsilon} S'(x, \epsilon) \varphi(x)$$

$$\varphi''(x) = \frac{i}{\epsilon} S''(x, \epsilon) \varphi(x) + \frac{i}{\epsilon} S'(x, \epsilon) \varphi'(x) = \left[\frac{i}{\epsilon} S''(x, \epsilon) - \frac{S'^2(x, \epsilon)}{\epsilon^2} \right] \varphi(x)$$

Reemplazando este resultado en la ecuación diferencial, se obtiene

$$-i\epsilon S''(x, \epsilon) + S'^2(x, \epsilon) + gx^4 = E \quad (3.8)$$

Cuando $|x| \rightarrow \infty$, el factor gx^4 *varía suavemente*. En efecto

$$\left| \frac{1}{gx^4} \frac{d(gx^4)}{dx} \right| = \frac{4}{|x|} \rightarrow 0 \text{ cuando } |x| \rightarrow \infty$$

El caso límite ocurre cuando la expresión anterior se anula idénticamente $\forall x$: Una constante aparece en la ecuación diferencial en vez de gx^4 . En tal caso la solución satisface $\ln \varphi(x) \propto ax + b$ (a, b son constantes) y por tanto se cumple que $S''(x, \epsilon) = 0$. En el caso actual, donde la derivada *varía suavemente* es de esperarse que $S''(x, \epsilon) \approx 0$. Ello significa que la primera aproximación a $S(x, \epsilon)$ se obtiene con

$$S'^2(x, \epsilon) + gx^4 = E \implies S'(x, \epsilon) \approx \pm \sqrt{E - gx^4} = \pm i \sqrt{gx^4 - E}$$

y cuando $|x| \rightarrow \infty$

$$S'(x, \epsilon) \approx \pm ig^{1/2}x^2 \implies S(x, \epsilon) \approx \pm \frac{1}{3}ig^{1/2}x^3, \quad |x| \rightarrow \infty \quad (3.9)$$

En consecuencia; la forma asintótica convergente, cuando $|x| \rightarrow \infty$, de la ecuación diferencial es:

$$\boxed{S(x, \epsilon) \approx \frac{1}{3}ig^{1/2}|x|^3 \implies \varphi(x) \propto e^{-g^{1/2}|x|^3/3\epsilon}} \quad (3.10)$$

Para obtener una mejor aproximación, reemplazamos $S''(x, \epsilon) \approx 2ig^{1/2}|x|$, el cual es el resultado (3.9), en la expresión general (3.8):

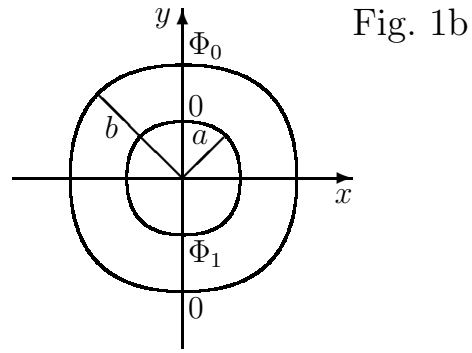
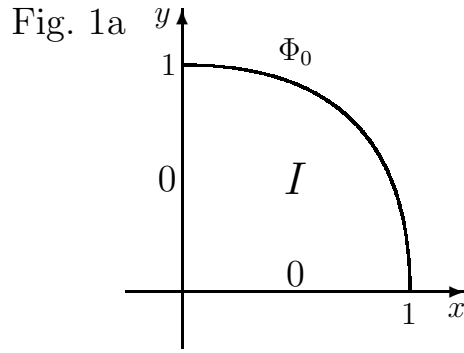
$$\begin{aligned} S'(x, \epsilon) &\approx \pm i \sqrt{gx^4 - i\epsilon S''(x, \epsilon)} = \pm i \sqrt{gx^4 + 2\epsilon g^{1/2}|x|} \\ &= \pm ig^{1/2}x^2 \sqrt{1 + 2\epsilon g^{-1/2}|x|^{-3}} \approx \pm ig^{1/2}x^2 (1 + \epsilon g^{-1/2}|x|^{-3}) \\ &= \pm ig^{1/2}x^2 \pm i\epsilon |x|^{-1} \end{aligned}$$

Note que hemos usado la condición $\epsilon \gtrsim 0$.

$$\boxed{\begin{aligned} S(x, \epsilon) &\approx \frac{1}{3}ig^{1/2}|x|^3 + i\epsilon \operatorname{sgn}(x) \ln |x| \\ \varphi(x) &\propto \frac{e^{-g^{1/2}|x|^3/3\epsilon}}{|x|^{\operatorname{sgn}(x)}} \end{aligned}, \quad |x| \rightarrow \infty} \quad (3.11)$$

Si deseamos continuar con la generación de mejores aproximaciones en el límite $|x| \rightarrow \infty$, podemos proceder *iterativamente* partir de la expresión (3.8):

$$\begin{aligned} S_{n+1}(x, \epsilon) &\approx \frac{1}{2}ig^{1/2}|x|^3 + \frac{\epsilon}{2g^{1/2}} \int dx \frac{S''_n(x, \epsilon)}{x^2}, \quad n = -1, 0, 1, 2, \dots; \quad |x| \rightarrow \infty \\ S_{-1}(x, \epsilon) &= 0 \end{aligned}$$



En los problemas siguientes se supone que $\Phi(r, \theta)$ satisface la ecuación de Laplace bidimensional en las regiones donde se evalúa la solución del problema propuesto.
 $x = r \cos \theta$. $y = r \sin \theta$.

3. Calcule $\Phi(r, \theta)$ en la región I si $\Phi(r, \theta) = 0$ en los segmentos sobre el eje x e y y $\Phi(r, \theta) = \Phi_0$ sobre el arco de circunferencia, en el primer cuadrante, de radio 1. Suma la serie resultante y exprese el resultado en términos de las coordenadas cartesianas x e y . Ver Fig. 1a.

SOLUCIÓN:

La solución general es de la forma:

$$\Phi(r, \theta) = (A_0 + B_0 \ln r)(C\theta + D) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n r^n \sin(n\theta + \delta_n) + B_n r^{-n} \sin(n\theta + \gamma_n)]$$

A_n y B_n son constantes independientes de r y $\theta \forall n = 0, 1, 2, \dots$. Así mismo, δ_n y γ_n son constantes independientes de r y $\theta \forall n = 1, 2, \dots$. C y D son constantes independientes de r y θ .

Puesto que la solución debe ser *finita* en el origen, debemos escoger $B_n = 0, \forall n = 0, 1, 2, \dots$. A_0 no puede determinarse *separadamente* de C y D . Por tanto, escogemos $A_0 = 1$. La solución se reduce a

$$\Phi(r, \theta) = C\theta + D + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \sin(n\theta + \delta_n)$$

Para satisfacer la condición de frontera en el segmento $\{(r, 0) \mid 0 < r < 1\}$ se debe cumplir

$$0 = D + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \sin(\delta_n)$$

Basta, entonces, con escoger $D = 0$ y $\delta_n = 0, \forall n = 1, 2, 3, \dots$. La solución se reduce a

$$\Phi(r, \theta) = C\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \sin(n\theta)$$

Para satisfacer la condición de frontera en el segmento $\left\{ \left(r, \frac{\pi}{2} \right) \mid 0 < r < 1 \right\}$ se debe cumplir

$$0 = C \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \operatorname{sen} \left(n \frac{\pi}{2} \right) = C \frac{\pi}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} A_n r^n \operatorname{sen} \left(n \frac{\pi}{2} \right)$$

Esta se satisface idénticamente si $C = 0$ y $A_n = 0, \forall n = 1, 3, 5, \dots$. La solución se reduce a

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} r^{2n} \operatorname{sen}(2n\theta)$$

Puesto que la solución es invariante bajo el cambio $\theta \rightarrow \pi/2 - \theta$, se debe cumplir que³

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} r^{2n} \operatorname{sen}(2n\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} r^{2n} \operatorname{sen} \left(2n \left[\frac{\pi}{2} - \theta \right] \right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} r^{2n} (-1)^{n+1} \operatorname{sen}(2n\theta) \quad (3.12)$$

la cual se satisface si escogemos $A_n = 0, \forall n = 2, 4, 6, \dots$. Por lo tanto, la solución se reduce a

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{4n+2} r^{4n+2} \operatorname{sen}([4n+2]\theta)$$

Impongamos la condición de frontera en el arco $\left\{ (a, \theta) \mid 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$:

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{4n+2} \operatorname{sen}([4n+2]\theta)$$

Multiplicando ambos miembros por $\operatorname{sen}([4n+2]\theta)$ e integrando en el intervalo $[0, \pi/2]$, se obtiene

$$\begin{aligned} V_0 \int_0^{\pi/2} d\theta \operatorname{sen}([4n+2]\theta) &= \sum_{n'=0}^{\infty} A_{4n'+2} \int_0^{\pi/2} d\theta \operatorname{sen}([4n+2]\theta) \operatorname{sen}([4n'+2]\theta) \\ \int_0^{\pi/2} d\theta \operatorname{sen}([4n+2]\theta) &= \frac{-\cos([4n+2]\theta)}{4n+2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{-\cos([2n+1]\pi) + 1}{4n+2} = \frac{1}{2n+1} \\ \int_0^{\pi/2} d\theta \operatorname{sen}([4n+2]\theta) \operatorname{sen}([4n'+2]\theta) &= \delta_{nn'} \int_0^{\pi/2} d\theta \operatorname{sen}^2([4n+2]\theta) \\ &= \delta_{nn'} \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1 - \cos(2[4n+2]\theta)}{2} = \frac{\pi}{4} \delta_{nn'} \end{aligned}$$

Estos resultados conducen a $A_{4n+2} = (4V_0/\pi) / (2n+1)$. La solución puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) &= \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{4n+2} \operatorname{sen}([4n+2]\theta)}{2n+1} = \frac{4V_0}{\pi} \Im \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{4n+2} e^{i(4n+2)\theta}}{2n+1} \\ &= \frac{4V_0}{\pi} \Im \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r e^{i\theta})^{4n+2}}{2n+1} = \frac{4V_0}{\pi} \Im \varphi(z) \Big|_{z=r e^{i\theta}=x+iy} \end{aligned}$$

³Este paso no es estrictamente necesario pero aprovecha una simetría *evidente* del problema en estudio. Esta decisión facilita los pasos remanentes que determinan la solución. (3.12) equivale a determinar las condiciones que hacen invariante a $\operatorname{sen}(2n\theta)$ bajo el cambio $\theta \rightarrow \pi - \theta$.

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+2}}{2n+1} \implies \left(\varphi'(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n+1}, \quad \varphi(0) = 0 \right); \quad z \in \mathbf{C}, |z| < 1$$

Puesto que $\varphi'(z)$ se ha reducido a una serie geométrica, se obtiene

$$\varphi'(z) = \frac{2z}{1-z^4} = \frac{z}{1-z^2} + \frac{z}{1+z^2}$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{1}{2} \ln(1-z^2) + \frac{1}{2} \ln(1+z^2) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{[1-z^2][1+z^{*2}]}{|1+z^2|^2}\right) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-z^2+z^{*2}-|z|^4}{|1+z^2|^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-2i\Im(z^2)-|z|^4}{|1+z^2|^2}\right) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-[x^2+y^2]^2-4ixy}{|1+z^2|^2}\right) \end{aligned}$$

Con este resultado se obtiene la solución al problema propuesto:

$$\Phi(r, \theta) = \left\{ \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{4xy}{1-[x^2+y^2]^2}\right) \right\} V_0$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

(3.13)

4. Calcule $\Phi(r, \theta)$ en la región entre dos circunferencias de radios a y b ($0 < a < b$). Ver Fig 1b. Las condiciones de frontera son:

$$\Phi(b, \theta) = \begin{cases} \Phi_0, & 0 \leq \theta < \pi \\ 0, & \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases}; \quad \Phi(a, \theta) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \theta < \pi \\ \Phi_1, & \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

La solución general es de la forma:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) &= \left[A_0 + B_0 \ln\left(\frac{r}{a}\right) \right] (C\theta + D) \\ &+ \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin(n\theta + \delta_n) + B_n \left(\frac{a}{r}\right)^n \sin(n\theta + \gamma_n) \right] \end{aligned}$$

$A_n, B_n, \delta_n, \gamma_n, C$ y D son constantes independientes de r y θ .

Puesto que la solución es invariante bajo el cambio $\theta \rightarrow \pi - \theta$, la función $\sin(n\theta + \alpha_n)$ debe permanecer, también, invariante bajo tal cambio ($\alpha_n = \delta_n$ o/y γ_n):

$$\sin(n[\pi - \theta] + \alpha_n) = \sin(n\pi - [n\theta - \alpha_n]) = (-1)^{n+1} \sin(n\theta - \alpha_n)$$

Por lo tanto para satisfacer la simetría mencionada arriba, basta escoger $A_n = B_n = 0, \forall n = 2, 4, 6, \dots$ y $\delta_n = \gamma_n = 0, \forall n = 1, 3, 5, \dots$. Así mismo, $C = 0$ y $D = 1$. La solución se reduce a:

$$\Phi(r, \theta) = A_0 + B_0 \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} + B_{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1} \right] \text{sen}([2n+1]\theta)$$

Para un valor dado de r ($a < r < b$), se obtiene a partir de la expresión anterior los siguientes resultados⁴:

$$\begin{aligned} A_0 + \ln\left(\frac{r}{a}\right) B_0 &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \Phi(r, \theta) \\ \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} A_{2n+1} + \left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1} B_{2n+1} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\pi} \Phi(r, \theta) \text{sen}([2n+1]\theta) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Usando la primera de las expresiones (3.14) para $r = a^+$ y $r = b^-$, obtendremos

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \Phi(a, \theta) = \frac{1}{2} \Phi_1 \\ A_0 + \ln(\Lambda) B_0 &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \Phi(b, \theta) = \frac{1}{2} \Phi_0, \quad \Lambda \equiv \frac{b}{a} \\ A_0 &= \frac{1}{2} \Phi_1, \quad B_0 = \frac{\Phi_0 - \Phi_1}{2 \ln \Lambda} \end{aligned}$$

Usando la segunda de las expresiones (3.14) para $r = a^+$ y $r = b^-$, obtendremos

$$\begin{aligned} A_{2n+1} + B_{2n+1} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\pi} \Phi(a, \theta) \text{sen}([2n+1]\theta) = -\frac{2\Phi_1}{(2n+1)\pi} \\ \Lambda^{2n+1} A_{2n+1} + \Lambda^{-2n-1} B_{2n+1} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\pi} \Phi(b, \theta) \text{sen}([2n+1]\theta) = \frac{2\Phi_0}{(2n+1)\pi} \end{aligned}$$

$$A_{2n+1} = \frac{\begin{vmatrix} -2\Phi_1/[(2n+1)\pi] & 1 \\ 2\Phi_0/[(2n+1)\pi] & \Lambda^{-2n-1} \end{vmatrix}}{\Lambda^{-2n-1} - \Lambda^{2n+1}} = \frac{2}{(2n+1)\pi} \frac{\Phi_0 + \Lambda^{-2n-1}\Phi_1}{\Lambda^{2n+1} - \Lambda^{-2n-1}}$$

⁴Aquí usamos las identidades:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \text{sen}([2n+1]\theta) = 0, \quad \int_0^{2\pi} d\theta \text{sen}([2n+1]\theta) \text{sen}([2n'+1]\theta) = \pi \delta_{nn'}$$

$$\int_0^{\pi} d\theta \text{sen}([2n+1]\theta) = \frac{2}{2n+1}, \quad \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \text{sen}([2n+1]\theta) = -\frac{2}{2n+1}$$

con $n, n' = 0, 1, 2, \dots$

$$B_{2n+1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2\Phi_1/[(2n+1)\pi] \\ \Lambda^{2n+1} & 2\Phi_0/[(2n+1)\pi] \end{vmatrix}}{\Lambda^{-2n-1} - \Lambda^{2n+1}} = -\frac{2}{(2n+1)\pi} \frac{\Phi_0 + \Lambda^{2n+1}\Phi_1}{\Lambda^{2n+1} - \Lambda^{-2n-1}}$$

La solución es:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) &= \frac{1}{2}\Phi_1 + \frac{1}{2}(\Phi_0 - \Phi_1) \frac{\ln(r/a)}{\ln \Lambda} + \\ &\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Phi_0 + \Lambda^{-2n-1}\Phi_1)(r/a)^{2n+1} - (\Phi_0 + \Lambda^{2n+1}\Phi_1)(a/r)^{2n+1}}{\Lambda^{2n+1} - \Lambda^{-2n-1}} \frac{\text{sen}([2n+1]\theta)}{2n+1} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\Lambda = \frac{b}{a}$$

Tarea 4

Polinomios de Legendre, Ecuación de Laplace en Tres Dimensiones y Función de Green

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

12 / 08 / 2003
Prof. Félix Marín
Métodos Matemáticos de la Física II
<http://fisica.ciens.ucv.ve/felix/>
TAREA¹N^o 4

SOLUCIÓN

Resuelva SOLO tres (3) de los siguientes problemas. Cada uno de ellos contribuye 20/3 a la calificación de esta tarea.

En los dos primeros problemas, $P_\ell(x)$ es el polinomio de Legendre de orden ℓ con $\ell = 0, 1, 2, \dots$

1. Evalúe la integral

$$\int_0^1 dx P_\ell(x)$$

como una expresión que involucra factoriales. Por ejm. . . , el resultado no contiene *explícitamente* funciones Gamma².

SOLUCIÓN:

¹FECHA DE ENTREGA: **miércoles 20 de agosto de 2003** (Antes de o en el examen final).

No se aceptarán tareas realizadas en computador.

²Note que

$$(a+b)^n = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\ell! \Gamma(n-\ell+1)} a^\ell b^{n-\ell}, \quad a, b, n \in \mathbf{C}$$

La *Función Generatriz* de los polinomios de Legendre viene dada por

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h^{\ell} P_{\ell}(x), \quad |h| < 1, \quad x \in [-1, 1]$$

Integrando ambos miembros sobre el intervalo $[0, 1]$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2xh+h^2}} = \int_0^1 dx \sum_{\ell=0}^{\infty} h^{\ell} P_{\ell}(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} h^{\ell} \int_0^1 dx P_{\ell}(x) \quad (4.1)$$

La evaluación solicitada se obtiene por un desarrollo en potencias de h del miembro izquierdo del cual se compara, término a término, con el miembro derecho

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2xh+h^2}} &= \left. \frac{\sqrt{1-2xh+h^2}}{-h} \right|_{x=0}^{x=1} = \frac{\sqrt{1-2h+h^2} - \sqrt{1+h^2}}{-h} \\ &= \frac{1-h-\sqrt{1+h^2}}{-h} = \frac{\sqrt{1+h^2} - 1 + h}{h} \\ &= \frac{1}{h} \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2)}{\ell! \Gamma(3/2-\ell)} h^{2\ell} - 1 + h \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2)}{\ell! \Gamma(3/2-\ell)} h^{2\ell} - 1 + h \right] \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2)}{\ell! \Gamma(3/2-\ell)} h^{2\ell-1} + 1 \end{aligned}$$

La expresión (4.1) se reduce a

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2)}{(\ell+1)! \Gamma(1/2-\ell)} h^{2\ell+1} + 1 \\ &= \\ &\sum_{\ell=0}^{\infty} h^{\ell} \int_0^1 dx P_{\ell}(x) \\ &= \\ &\overbrace{\int_0^1 dx P_0(x) + \sum_{\ell=1}^{\infty} h^{2\ell} \int_0^1 dx P_{2\ell}(x)}^{\text{Potencias pares de } h} + \overbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} h^{2\ell+1} \int_0^1 dx P_{2\ell+1}(x)}^{\text{Potencias impares de } h} \end{aligned}$$

Comparando ambos miembros, se obtiene³:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx P_{\ell}(x) &= \delta_{\ell 0}, \quad \ell \text{ par} \\ \int_0^1 dx P_{2\ell+1}(x) &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1/2)}{(\ell+1)! \Gamma(1/2-\ell)}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

³Aquí usamos la conocida propiedad de recurrencia de la función Gamma: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Ver[Abramowitz].

Expresaremos el cociente $\Gamma(1/2)/\Gamma(1/2 - \ell)$ en término de factoriales

$$\begin{aligned}\Gamma(1/2) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(\frac{1}{2} - \ell\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \ell\right) \\ &= \frac{(-1)^\ell}{2^\ell} 1 \times 3 \times \dots \times (2\ell - 1)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \ell\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2 - \ell)} = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell} \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \dots \times (2\ell - 2)(2\ell - 1)(2\ell)}{(2 \times 1)(2 \times 2)(2 \times 3)\dots(2 \times [\ell - 1])(2 \times \ell)} = (-1)^\ell \frac{(2\ell)!}{2^{2\ell} \ell!}$$

Con este resultado se obtiene⁴

$$\int_0^1 dx P_{2\ell+1}(x) = \frac{(-1)^\ell}{2^{2\ell+1}(\ell+1)} \binom{2\ell}{\ell}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_0^1 dx P_\ell(x) = \begin{cases} \delta_{\ell 0} & , \quad \text{si } \ell \text{ es par} \\ \frac{(-1)^{(\ell-1)/2}}{2^{\ell-1}(\ell+1)} \binom{\ell-1}{[\ell-1]/2} & , \quad \text{si } \ell \text{ es impar} \end{cases} \quad (4.2)$$

2. Evalúe explícitamente la expresión

$$\sum_{\ell'=0}^{\ell} \int_0^1 dx P_{\ell'}(x) P_{\ell-\ell'}(x)$$

SOLUCIÓN:

La *Función Generatriz* de los polinomios de Legendre viene dada por

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h^\ell P_\ell(x), \quad |h| < 1, \quad x \in [-1, 1]$$

y

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-2xh+h^2} &= \sum_{\substack{\ell'=0 \\ \ell''=0}}^{\infty} h^{\ell'+\ell''} P_{\ell'}(x) P_{\ell''}(x) = \sum_{\substack{\ell'=0 \\ \ell''=0}}^{\infty} h^{\ell'+\ell''} P_{\ell'}(x) P_{\ell''}(x) \overbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \delta_{\ell, \ell'+\ell''}}^{=1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} h^\ell \sum_{\ell'=0}^{\infty} \sum_{\ell''=0}^{\infty} P_{\ell'}(x) P_{\ell''}(x) \delta_{\ell, \ell'+\ell''} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} h^\ell \sum_{\ell'=0}^{\infty} P_{\ell'}(x) P_{\ell-\ell'}(x) \sum_{\ell''=0}^{\infty} \delta_{\ell'', \ell-\ell'}\end{aligned}$$

⁴

$$\binom{m}{n} \equiv \frac{m!}{n!(m-n)!}, \quad 0 \leq n \leq m, \quad m, n \in \mathbf{N}$$

Pero $\sum_{\ell''=0}^{\infty} \delta_{\ell'', \ell-\ell'} = 1$ si $\ell - \ell' \geq 0$ y es nula en cualquier otro caso. Por lo tanto

$$\frac{1}{1 - 2xh + h^2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h^{\ell} \left[\sum_{\ell'=0}^{\ell} P_{\ell'}(x) P_{\ell-\ell'}(x) \right]$$

Integrando ambos miembros, en el intervalo $[0, 1]$, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{\infty} h^{\ell} \left[\sum_{\ell'=0}^{\ell} \int_0^1 dx P_{\ell'}(x) P_{\ell-\ell'}(x) \right] &= \int_0^1 \frac{dx}{1 - 2xh + h^2} = \frac{\ln |1 - 2xh + h^2|}{-2h} \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{2h} \left[\ln(1 + h^2) - 2 \ln(1 - h) \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Usando la serie de Taylor $\ln(1 + z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} z^{\ell+1} / (\ell + 1)$, con $|z| < 1$; podemos obtener una serie en potencias de h para la expresión anterior:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2h} \left[\ln(1 + h^2) - 2 \ln(1 - h) \right] = \\ &= \frac{1}{2h} \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \frac{h^{2\ell+2}}{\ell + 1} - 2 \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \frac{(-h)^{\ell+1}}{\ell + 1} \right] \\ &= \frac{1}{2h} \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \frac{h^{2\ell+2}}{\ell + 1} + 2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{h^{\ell+1}}{\ell + 1} \right] \\ &= \frac{1}{2h} \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \frac{h^{2\ell+2}}{\ell + 1} + 2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{h^{2\ell+2}}{2\ell + 2} + 2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{h^{2\ell+1}}{2\ell + 1} \right] \\ &= \frac{1}{2h} \left\{ \sum_{\ell=0}^{\infty} [(-1)^{\ell} + 1] \frac{h^{2\ell+2}}{\ell + 1} + 2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{h^{2\ell+1}}{2\ell + 1} \right\} = \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ par}}}^{\infty} \frac{h^{2\ell+1}}{\ell + 1} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{h^{2\ell}}{2\ell + 1} \end{aligned}$$

Con este resultado y la expresión (4.3) concluimos que

$$\boxed{\sum_{\ell'=0}^{\ell} \int_0^1 dx P_{\ell'}(x) P_{\ell-\ell'}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\ell + 1}, & \text{si } \ell \text{ es impar y } \frac{\ell - 1}{2} \text{ es par} \\ \frac{1}{\ell + 1}, & \text{si } \ell \text{ es par} \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}} \quad (4.4)$$

3. Considere la región encerrada por el cono

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} = z \tan \alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right\}$$

Encuentre la solución para la ecuación de Laplace tridimensional $\nabla^2\Phi(\vec{r}) = 0$ en \mathcal{C} si

$$\Phi(x, y, z) = V_0 e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}/\lambda}, \quad (x, y, z) \in \text{la superficie del cono}; \quad \lambda > 0$$

SOLUCIÓN:

Obviamente, el problema tiene simetría azimutal cuando es formulado en coordenadas esféricas⁵. Por tanto, la solución general es independiente de la variable azimutal (ver pie de página 5) ϕ y de la forma ($\Phi(x, y, z) \equiv \Phi(r, \theta)$)

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

A_{ℓ} y B_{ℓ} ($\ell = 0, 1, 2, \dots$) son constantes independientes de r y θ . $P_{\ell}(\cos \theta)$ es el polinomio de Legendre de orden ℓ . $\ell = 0, 1, 2, \dots$

Al imponer la condición de frontera en la superficie del cono, se obtiene

$$V_0 e^{-r/\lambda} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \alpha)$$

Usemos el desarrollo en serie de Taylor ($e^z = \sum_{\ell=0}^{\infty} z^{\ell}/\ell!$, $z \in \mathbf{C}$) de la función exponencial

$$V_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-r/\lambda)^{\ell}}{\ell!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \alpha)$$

Comparando, en ambos miembros, los coeficientes de las potencias de r , se obtiene

$$V_0 \frac{(-1)^{\ell}}{\lambda^{\ell} \ell!} = A_{\ell} P_{\ell}(\cos \alpha), \quad B_{\ell} P_{\ell}(\cos \alpha) = 0; \quad \forall \ell = 0, 1, 2, \dots$$

La solución no trivial y que satisface ambas ecuaciones requiere que $B_{\ell} = 0$, $\forall \ell = 0, 1, 2, \dots$, y se reduce a

$$\Phi(r, \theta) = V_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!} \left(\frac{r}{\lambda} \right)^{\ell} \frac{P_{\ell}(\cos \theta)}{P_{\ell}(\cos \alpha)} \tag{4.5}$$

4. Considere la región (encerrada por una *semiesfera*)

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < a^2, \quad z > 0 \right\}; \quad a > 0$$

Encuentre la solución para la ecuación de Laplace tridimensional $\nabla^2\Phi(\vec{r}) = 0$ en \mathcal{S} si

$$\Phi(x, y, 0) = V_0, \quad \text{y} \quad \Phi(x, y, z) = 0 \quad \text{si} \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

SOLUCIÓN:

⁵ $x = r \text{ sen } (\theta) \cos (\phi)$, $y = r \text{ sen } (\theta) \text{ sen } (\phi)$, $z = r \cos (\theta)$; $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$

Obviamente, el problema tiene simetría azimutal cuando es formulado en coordenadas esféricas. Por tanto, la solución general es independiente de la variable azimutal (ver pie de página 5) ϕ . En este caso particular, la variable θ se encuentra en el intervalo $[0, \pi/2]$.

La forma de la solución general ($\Phi(x, y, z) \equiv \Phi(r, \theta)$) es:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

A_{ℓ} y B_{ℓ} ($\ell = 0, 1, 2, \dots$) son constantes independientes de r y θ . $P_{\ell}(\cos \theta)$ es el polinomio de Legendre de orden ℓ . $\ell = 0, 1, 2, \dots$

Para garantizar que la solución sea *finita* cuando $r \rightarrow 0^+$, es necesario imponer la condición $B_{\ell} = 0, \forall \ell = 0, 1, 2, \dots$. La solución se reduce a

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$$

Al imponer la condición de frontera en la *base inferior de la semiesfera* ($\theta = \pi/2$) se obtiene⁶

$$V_0 = \Phi\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(0) = A_0 + \sum_{\substack{\ell=2 \\ \ell \text{ par}}}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(0)$$

Esta puede satisfacerse con la escogencia

$$A_0 = V_0, \quad A_{\ell} = 0 \quad \forall \ell \text{ par}$$

La solución se reduce a

$$\Phi(r, \theta) = V_0 + \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{2\ell+1} r^{2\ell+1} P_{2\ell+1}(\cos \theta)$$

Al imponer la condición de frontera en la *semiesfera* ($r = a$) se obtiene

$$0 = \Phi(a, \theta) = V_0 + \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{2\ell+1} a^{2\ell+1} P_{2\ell+1}(\cos \theta)$$

Multiplicando ambos miembros por $P_{2\ell+1}(\cos \theta) \sin \theta$ ($\ell = 0, 1, 2, \dots$) e integrando en el intervalo $[0, \pi/2]$

$$\begin{aligned} & V_0 \int_0^{\pi/2} d\theta \sin(\theta) P_{2\ell+1}(\cos \theta) \\ & + \\ & \sum_{\ell'=0}^{\infty} A_{2\ell'+1} a^{2\ell'+1} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin(\theta) P_{2\ell+1}(\cos \theta) P_{2\ell'+1}(\cos \theta) = 0 \end{aligned}$$

⁶ $P_{\ell}(x)$, con $x \in [-1, 1]$, es *par* (*impar*) si ℓ es par (impar). Por tanto, $P_{\ell}(0) = 0$ si ℓ es impar. Note que $P_0(x) = 1, \forall x \in [-1, 1]$.

Evaluando las integrales de la expresión anterior

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \sin(\theta) P_{2\ell+1}(\cos\theta) = - \int_1^0 dx P_{2\ell+1}(x) = \int_0^1 dx P_{2\ell+1}(x)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} d\theta \sin(\theta) P_{2\ell+1}(\cos\theta) P_{2\ell'+1}(\cos\theta) \\ &= \\ & - \int_1^0 dx P_{2\ell+1}(x) P_{2\ell'+1}(x) = \int_0^1 dx P_{2\ell+1}(x) P_{2\ell'+1}(x) \\ &= \\ & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx P_{2\ell+1}(x) P_{2\ell'+1}(x) = \frac{1}{2} \frac{2\delta_{2\ell+1,2\ell'+1}}{2(2\ell+1)+1} = \frac{\delta_{\ell\ell'}}{4\ell+3} \end{aligned}$$

se obtiene

$$V_0 \int_0^1 dx P_{2\ell+1}(x) + A_{2\ell+1} a^{2\ell+1} \frac{1}{4\ell+3} = 0 \quad \implies \quad A_{2\ell+1} = -V_0 \frac{4\ell+3}{a^{2\ell+1}} \int_0^1 dx P_{2\ell+1}(x)$$

y la solución se reduce a

$$\Phi(r, \theta) = V_0 \left\{ 1 - \sum_{\ell=0}^{\infty} (4\ell+3) \left[\int_0^1 dx P_{2\ell+1}(x) \right] \left(\frac{r}{a} \right)^{2\ell+1} P_{2\ell+1}(\cos\theta) \right\} \quad (4.6)$$

o usando el resultado (4.2)

$$\Phi(r, \theta) = V_0 \left[1 - \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{(4\ell+3)}{2^{2\ell+1}(\ell+1)} \binom{2\ell}{\ell} \left(\frac{r}{a} \right)^{2\ell+1} P_{2\ell+1}(\cos\theta) \right] \quad (4.7)$$

5. Considere una partícula de masa m atada a un resorte de constante de Hooke $m\omega_0^2$ ($\omega_0 > 0$) la cual solo se mueve a lo largo del eje x (Oscilador Armónico Simple). Use el *método de la Función de Green* para evaluar el desplazamiento $x(t)$ ($t > 0$), en función del tiempo, si se aplica una *fuerza impulsora* $F(t) \equiv m\omega_0 v_0 \sin(\omega_0 t)$. Las condiciones iniciales son $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = v_0$.

SOLUCIÓN:

La ecuación de movimiento para tal partícula viene dada por la componente x de la *segunda ley de Newton* ($m\ddot{x}(t) = -m\omega_0^2 x(t) + F(t)$) la cual puede ser escrita en la forma

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{1}{m} F(t); \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (4.8)$$

En términos de la *función de Green* $G(t, t')$, la solución puede expresarse como

$$x(t) = x_p(t) + \int_0^\infty dt' G(t, t') \left[\frac{F(t')}{m} \right], \quad \begin{cases} G(0, t') = 0 \\ \left. \frac{\partial G(t, t')}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

$x_p(t)$ es una *solución particular*, que satisface las condiciones iniciales, de la *ecuación homogénea*⁷ $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$

$$x_p(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \text{sen}(\omega_0 t)$$

La presencia de $x_p(t)$ en (4.9) garantiza que las condiciones que satisface la función de Green $G(t, t')$ serán las *mas simples posibles*.

Puesto que (4.9) debe satisfacer la Ec. (4.8), debe cumplirse que

$$\frac{1}{m} \int_0^\infty dt' \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2 \right) G(t, t') \right] F(t') = \frac{1}{m} F(t)$$

con las condiciones iniciales

$$G(0, t') = 0, \quad \left. \frac{\partial G(t, t')}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

Por tanto

$$\frac{\partial^2 G(t, t')}{\partial t^2} + \omega_0^2 G(t, t') = \delta(t - t') \quad (4.10)$$

$$G(0, t') = 0, \quad \left. \frac{\partial G(t, t')}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (4.11)$$

Integrando, sobre la variable t , ambos miembros de la ecuación de movimiento (4.10) de la función de Green en el intervalo $[t' - \epsilon, t' + \epsilon]$ y tomando, a continuación, el límite $\epsilon \rightarrow 0^+$ se obtiene

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \left[\frac{\partial^2 G(t, t')}{\partial t^2} + \omega_0^2 G(t, t') \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \overbrace{\int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \delta(t - t')}^1$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\left. \frac{\partial G(t, t')}{\partial t} \right|_{t=t'+\epsilon} - \left. \frac{\partial G(t, t')}{\partial t} \right|_{t=t'-\epsilon} \right] = 1$$

En consecuencia, (4.10) y (4.11) equivalen a

$$\frac{\partial^2 G(t, t')}{\partial t^2} + \omega_0^2 G(t, t') = 0, \quad t \neq t'; \quad \left. \frac{\partial G(t, t')}{\partial t} \right|_{t=t'+} - \left. \frac{\partial G(t, t')}{\partial t} \right|_{t=t'-} = 1 \quad (4.12)$$

$$G(0, t') = 0, \quad \left. \frac{\partial G(t, t')}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (4.13)$$

⁷Una ecuación tal como (4.8) se le llama *Ecuación con Fuentes* donde $F(t)/m$ es la fuente.

Aquí hemos usado la continuidad de la función de Green en $t = t'$. Es decir

$$\lim_{t \rightarrow t'} G(t, t') = G(t', t')$$

τ^\pm es una abreviatura de $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\tau \pm \epsilon)$.

La ecuación diferencial en (4.12) nos muestra que la solución para la función de Green, cuando $t \neq t'$, es la solución para el oscilador armónico simple: Son combinaciones lineales de $\text{sen}(\omega_0 t)$ y $\text{cos}(\omega_0 t)$. Como consecuencia de las condiciones iniciales (4.13), se obtiene que⁸ $G(t, t') = 0$ cuando $t < t'$. Cuando $t > t'$, la combinación lineal mencionada arriba que se anula⁹ en el límite $t \rightarrow t'^+$ es de la forma $A \text{sen}(\omega_0 [t - t'])$ donde A es una constante independiente del tiempo. En resumen

$$G(t, t') = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } t < t' \\ A \text{sen}(\omega_0 [t - t']), & \text{si } t > t' \end{cases}$$

La constante A se determina a través del *salto de la derivada* de la función de Green (ver (4.12)) en $t = t'$:

$$A\omega_0 \text{cos}(\omega_0 [t - t'])_{t=t'^+} - 0 = 1 \quad \implies \quad A = \frac{1}{\omega_0}$$

$$G(t, t') = \Theta(t - t') \frac{\text{sen}(\omega_0 [t - t'])}{\omega_0}$$

Reemplazando en la solución general (4.9), encontramos que

$$x(t) = x_p(t) + \int_0^t dt' \frac{\text{sen}(\omega_0 [t - t'])}{\omega_0} \left[\frac{F(t')}{m} \right] \quad (4.14)$$

donde $\ddot{x}_p(t) + \omega_0^2 x_p(t) = 0$ y ($x_p(0) = x(0)$, $\dot{x}_p(0) = \dot{x}(0)$).

Insertando en la solución general el caso particular $F(t) = m\omega_0 v_0 \text{sen}(\omega_0 t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{\omega_0} \text{sen}(\omega_0 t) + v_0 \int_0^t dt' \text{sen}(\omega_0 [t - t']) \text{sen}(\omega_0 t') \\ &= \frac{v_0}{\omega_0} \text{sen}(\omega_0 t) + \frac{1}{2} v_0 \int_0^t dt' \{ \text{cos}(\omega_0 [t - 2t']) - \text{cos}(\omega_0 t) \} \\ &= \frac{v_0}{\omega_0} \text{sen}(\omega_0 t) + \frac{1}{2} v_0 \left\{ \frac{\text{sen}(\omega_0 [t - 2t'])}{-2\omega_0} - t' \text{cos}(\omega_0 t) \right\}_{t'=0}^{t'=t} \end{aligned}$$

⁸Por ejm. . . , si $X(t) = \alpha \text{sen}(\omega_0 t) + \beta \text{cos}(\omega_0 t)$ con $X(0) = 0$ y $\dot{X}(0) = 0$; entonces

$$(\alpha \text{sen}(0) + \beta \text{cos}(0) = 0, \quad \alpha\omega_0 \text{cos}(0) - \beta\omega_0 \text{sen}(0) = 0) \implies \alpha = \beta = 0 \implies \boxed{X(t) = 0, \forall t}$$

⁹La función de Green es continua en $t = t'$ y $G(t', t') = 0$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{v_0}{\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{1}{2} v_0 \left\{ \frac{\operatorname{sen}(\omega_0 t)}{2\omega_0} - t \cos(\omega_0 t) + \frac{\operatorname{sen}(\omega_0 t)}{2\omega_0} \right\} \\
&= \frac{3v_0}{2\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t) - \frac{1}{2} v_0 t \cos(\omega_0 t)
\end{aligned}$$

Introduciendo la variable $\phi(t) \equiv \arctan(\omega_0 t/3)$:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{3v_0}{2\omega_0} [\operatorname{sen}(\omega_0 t) - \tan(\phi(t)) \cos(\omega_0 t)] \\
&= \frac{3v_0}{2\omega_0} \sec(\phi(t)) [\operatorname{sen}(\omega_0 t) \cos(\phi(t)) - \operatorname{sen}(\phi(t)) \cos(\omega_0 t)] \\
&= \frac{3v_0}{2\omega_0} \sqrt{\tan^2 \phi(t) + 1} \operatorname{sen}(\omega_0 t - \phi(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{3v_0}{2\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t) - \frac{1}{2} v_0 t \cos(\omega_0 t) \\
&= \frac{3v_0}{2\omega_0} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3} \omega_0 t\right)^2} \operatorname{sen}\left(\omega_0 t - \arctan\left(\frac{1}{3} \omega_0 t\right)\right)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

6. Las posiciones, en función del tiempo t , de N partículas de carga q_n vienen dadas, respectivamente, por $\vec{r}_n(t)$. $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Encuentre expresiones para la densidad de carga $\rho(\vec{r}, t)$ y la densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r}, t)$.

SOLUCIÓN:

La densidad de carga $\rho(\vec{r}, t)$ debe satisfacer las condiciones:

- a) $\rho(\vec{r}, t) = 0$ si $\vec{r} \neq \vec{r}_n(t)$, $\forall n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, en cualquier instante de tiempo t .
b)

$$\int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}, t) = \sum_{n=0}^{N-1} q_n, \quad \forall t$$

La integración se extiende a todo el espacio.

Con estas condiciones es claro que

$$\rho(\vec{r}, t) \equiv \sum_{n=0}^{N-1} q_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) \tag{4.16}$$

El lector podrá verificar que las condiciones mencionadas arriba se satisfacen idénticamente.

La densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r}, t)$ se obtiene a través de la *Ecuación de Continuidad* la cual relaciona la densidad de carga y la densidad de corriente como consecuencia de la *Conservación de la Carga Eléctrica*. Esbozaremos brevemente la derivación de la Ecuación de Continuidad.

Dado un punto \vec{r} del espacio, dividamos a este en dos partes: 1) un volumen V que contiene el punto \vec{r} y *encierra* la carga $Q_V(t)$ y 2) el espacio exterior a V el cual contiene la carga $Q_{\cancel{V}}(t)$. La carga total $Q_{total}(t) \equiv Q_V(t) + Q_{\cancel{V}}(t)$ en todo el espacio se conserva ($dQ_{total}(t)/dt = 0$). Por tanto

$$\frac{dQ_V(t)}{dt} + \frac{dQ_{\cancel{V}}(t)}{dt} = 0, \quad Q_V(t) \equiv \int_V d^3\vec{R} \rho(\vec{R}, t)$$

$dQ_{\cancel{V}}(t)/dt$ es la variación de la carga eléctrica en el espacio exterior a V y, puesto que la carga se conserva, representa la carga que fluye desde el interior de V . Se puede definir un vector densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r}, t)$ tal que

$$\frac{dQ_{\cancel{V}}(t)}{dt} = \int_S \vec{J}(\vec{R}, t) \cdot d\vec{S}$$

La integración se efectúa sobre la superficie del volumen V .

$$\frac{d}{dt} \left[\int_V d^3\vec{R} \rho(\vec{R}, t) \right] + \int_S \vec{J}(\vec{R}, t) \cdot d\vec{S} = 0$$

Usando el *Teorema de la Divergencia de Gauss* en la segunda integral, se obtiene

$$\int_V d^3\vec{R} \left[\frac{\partial \rho(\vec{R}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}(\vec{R}, t) \right] = 0$$

Dividiendo ambos miembros por V y tomando el límite $V \rightarrow 0$ se obtiene¹⁰

$$\lim_{\substack{V \rightarrow 0 \\ \vec{r} \in V}} \frac{1}{V} \int_V d^3\vec{R} \left[\frac{\partial \rho(\vec{R}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}(\vec{R}, t) \right] = 0$$

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) = 0, \quad (\text{Ecuación de Continuidad})$$

Usamos esta expresión para derivar la densidad de corriente

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\sum_{n=0}^{N-1} q_n \left[\nabla_{\vec{r}-\vec{r}_n(t)} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) \right] \cdot \frac{d[\vec{r} - \vec{r}_n(t)]}{dt} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} q_n \vec{v}_n(t) \cdot \nabla_{\vec{r}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) \end{aligned}$$

$\vec{v}_n(t) \equiv d\vec{r}_n(t)/dt$ es la velocidad de la carga n -ésima. Al proseguir la derivación en cuestión, usamos la identidad

$$\nabla \cdot [\phi(\vec{r}) \vec{A}(\vec{r})] = [\nabla \phi(\vec{r})] \cdot \vec{A}(\vec{r}) + \phi(\vec{r}) \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r})$$

¹⁰Note que $\vec{r} \in V$.

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) &= \sum_{n=0}^{N-1} q_n \left\{ \nabla_{\vec{r}} \cdot [\delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) \vec{v}_n(t)] - \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) \underbrace{\nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{v}_n(t)}_{=0} \right\} \\
&= \nabla_{\vec{r}} \cdot \left[\sum_{n=0}^{N-1} q_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) \vec{v}_n(t) \right]
\end{aligned}$$

Podemos identificar la sumatoria, en el segundo miembro, con la densidad de corriente:

$$\boxed{\vec{J}(\vec{r}, t) = \sum_{n=0}^{N-1} q_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) \vec{v}_n(t)} \quad (4.17)$$

En realidad, la *identificación* mencionada arriba permite la adición del *rotor* de un campo vectorial arbitrario. Es decir

$$\vec{J}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{J}(\vec{r}, t) + \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t) \quad \text{puesto que} \quad \nabla \cdot \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$$

Sin embargo, el flujo que genera $\nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t)$ a través de una superficie cerrada arbitraria es nulo y se argumenta que no podría ser *separado*, por ejm... en un experimento, del resultado (4.17).

Parte II
Exámenes y Soluciones

Examen Parcial 1

Repaso, Funciones de Variable Compleja e Integración en el Plano Complejo

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

lunes 30 de junio de 2003
Prof. Félix Marín
Métodos Matemáticos de la Física II
<http://fisica.ciens.ucv.ve/felix/>
1^{er} Examen Parcial¹

SOLUCIÓN

1. Calcule el área de la intersección de los círculos

$$C_0 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}, \quad C_1 = \{(x, y) \mid (x - 1)^2 + y^2 < 1\},$$

(5 puntos)

Respuesta: El área \mathcal{A} , encerrada por los círculos C_0 y C_1 , viene dada por la integral

$$\mathcal{A} \equiv \int \int_{\substack{x^2+y^2 < 1 \\ (x-1)^2+y^2 < 1}} dx dy = \int \int_{\substack{(x+1/2)^2+y^2 < 1 \\ (x-1/2)^2+y^2 < 1}} dx dy = 4 \int \int_{\substack{(x+1/2)^2+y^2 < 1 \\ (x-1/2)^2+y^2 < 1 \\ x > 0, y > 0}} dx dy$$

Las circunferencias descritas por $(x \pm 1/2)^2 + y^2 = 1$ se intersectan en los puntos $(0, \pm \sqrt{3}/2)$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 4 \int_0^{1/2} dx \int_0^{\sqrt{1-(x+1/2)^2}} dy = 4 \int_0^{1/2} dx \sqrt{1 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = 4 \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta \cos^2 \theta \\ &= 2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta [1 + \cos(2\theta)] = [2\theta + \sin(2\theta)]_{\pi/6}^{\pi/2} = \pi - \frac{\pi}{3} - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

¹Lapso: 2 horas. Explique, en detalle, los pasos realizados

$$\mathcal{A} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,2284 \quad (4.1)$$

En la integración sobre la variable x , realizamos el cambio de variables $x = \sin \theta - 1/2$.

2. Si a_n y b_n ($n = 1, 2$) son números reales, demuestre que la función

$$f(z) = a_1x + b_1y + c + (a_2x + b_2y)i, \quad z = x + iy, \quad c \in \mathbf{C} \quad (4.2)$$

es una *función entera* si y solamente si los coeficientes son tales que

$$f(z) = (a_1 - ib_1)z + c$$

(5 puntos)

Respuesta: $f(z)$ puede reescribirse en la forma

$$f(z) = f(x + iy) \equiv u(x, y) + iv(x, y)$$

$$u(x, y) = a_1x + b_1y + \Re c, \quad v(x, y) = \Im c + a_2x + b_2y$$

Puesto que f es entera, se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann en todo el plano complejo

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}; \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$$

Ello significa que

$$a_1 = b_2, \quad b_1 = -a_2 \implies v(x, y) = \Im c - b_1x + a_1y$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} f(z) &= a_1x + b_1y + \Re c + i[\Im c - b_1x + a_1y] = a_1(x + iy) - ib_1(x + iy) + (\Re c + i\Im c) \\ &= (a_1 - ib_1) \left(\overbrace{x + iy}^z \right) + c \end{aligned}$$

Hemos demostrado que si f es entera y de la forma expresada en (4.2), ella es de la forma:

$$f(z) = (a_1 - ib_1)z + c$$

Asi mismo, si $f(z)$ es de la forma

$$f(z) = (a_1 - ib_1)z + c = a_1x + b_1y + \Re c + i(a_1y - b_1x + \Im c), \quad a_1, b_1 \in \mathbf{R}$$

se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann $\forall x, y \in \mathbf{R}$

$$\frac{\partial (a_1x + b_1y + \Re c)}{\partial x} = \frac{\partial (a_1y - b_1x + \Im c)}{\partial y} = a_1$$

$$\frac{\partial (a_1x + b_1y + \Re c)}{\partial y} = -\frac{\partial (a_1y - b_1x + \Im c)}{\partial x} = b_1$$

Hemos demostrado que si $f(z)$ es de la forma $f(z) = (a_1 - ib_1)z + c$, con a_1 y $b_1 \in \mathbf{R}$, entonces:

f es entera

3. Evalúe la siguiente integral:

$$\mathcal{I}_0 \equiv \int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{1+x}, \quad 0 < a < 1$$

(10 puntos)

Respuesta: Considere la integral (ver Figura 1.1)

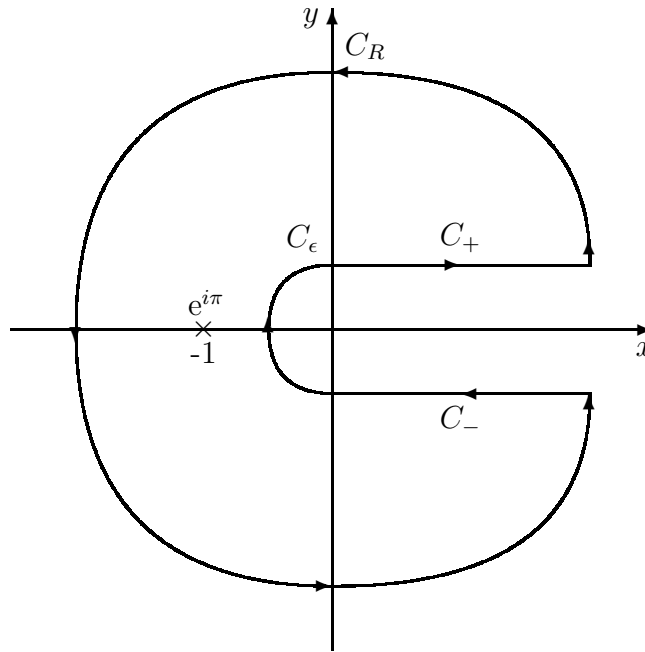


Figura 1.1: Camino de integración $C = C_R \cup C_\epsilon \cup C_+ \cup C_-$ (en sentido contrario al de las agujas del reloj) de la integral (4.3). El camino C_R es la unión de arcos de radio $R > 1$. El camino C_ϵ es una semicircunferencia de radio $\epsilon < 1$. C_\pm son paralelos al eje x . \times indica el único polo simple del integrando de (4.3).

$$\int_C dz \frac{z^{a-1}}{1+z}; \quad \text{con } z^k = (x^2 + y^2)^{k/2} e^{ik\theta(x,y)}, \quad 0 < \theta(x,y) < 2\pi, \quad k \in \mathbf{R}, \quad z \neq 0 \quad (4.3)$$

donde $z = x + iy$. El integrando tiene un polo simple en $z = -1$. En la evaluación de z^{a-1} se debe tomar $-1 = e^{i\pi}$ de acuerdo a la rama particular elegida para z^k en (4.3). Por tanto, usando el *Teorema de los Residuos*

$$\int_C dz \frac{z^{a-1}}{1+z} = 2\pi i e^{i(a-1)\pi} = -2\pi i e^{i\pi a} \quad (4.4)$$

A lo largo del camino C_R ($z = R e^{i\theta}$) se obtiene

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{C_R} dz \frac{z^{a-1}}{1+z} \right| = \left| \int_{0+}^{(2\pi)^-} R e^{i\theta} i d\theta \frac{R^{a-1} e^{i(a-1)\theta}}{1 + R e^{i\theta}} \right| \leq \int_0^{2\pi} d\theta \left| \frac{R^a}{1 + R e^{i\theta}} \right| \leq 2\pi \frac{R^a}{R-1}$$

Puesto que $a < 1$, se obtiene $\lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi R^a / (R-1) = 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} R^{a-1} = 0$ y en consecuencia

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_R} dz \frac{z^{a-1}}{1+z} = 0 \quad (4.5)$$

A lo largo del camino C_ϵ ($z = \epsilon e^{i\theta}$) se obtiene

$$\left| \int_{C_\epsilon} dz \frac{z^{a-1}}{1+z} \right| = \left| \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \epsilon e^{i\theta} i d\theta \frac{\epsilon^{a-1} e^{i(a-1)\theta}}{1 + \epsilon e^{i\theta}} \right| \leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \left| \frac{\epsilon^a}{1 + \epsilon e^{i\theta}} \right| \leq \pi \frac{\epsilon^a}{1-\epsilon}$$

Puesto que $a > 0$, se obtiene $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \pi \epsilon^a / (1-\epsilon) = \pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^a = 0$ y en consecuencia

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} dz \frac{z^{a-1}}{1+z} = 0 \quad (4.6)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} -2\pi i e^{i\pi a} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_+ \cup C_-} dz \frac{z^{a-1}}{1+z} = \overbrace{\int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{1+x}}^{\text{sobre } C_+: z \rightarrow x e^{i0^+}} + \overbrace{\int_\infty^0 dx \frac{x^{a-1} e^{i(a-1)2\pi}}{1+x}}^{\text{sobre } C_-: z \rightarrow x e^{i(2\pi)^-}} \\ &= (1 - e^{i2\pi a}) \int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{1+x} = e^{i\pi a} (e^{-i\pi a} - e^{i\pi a}) \int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{1+x} \\ &= e^{i\pi a} [-2i \operatorname{sen}(\pi a)] \int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{1+x} \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{1+x} = \pi \operatorname{cosec}(\pi a), \quad 0 < a < 1 \quad (4.7)$$

Examen Parcial 1

Rezagados: Integración en el Plano Complejo y Conducta Asintótica

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

lunes 18 de agosto de 2003
Prof. Félix Marín
Métodos Matemáticos de la Física II
<http://fisica.ciens.ucv.ve/felix/>
1^{er} Examen Parcial (Rezagados)¹

SOLUCIÓN

1. Evalúe la integral

$$P \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 - 1}$$

usando *solo* la definición de *Parte Principal* (No use integración en el plano complejo).

Respuesta: *Por definición*

$$P \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 - 1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{x^4 - 1} + \int_{1+\epsilon}^{\infty} \frac{dx}{x^4 - 1} \right)$$

Realizando, en la segunda integral, el cambio de variables $x \rightarrow 1/x$ se obtiene:

$$\begin{aligned} P \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 - 1} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{x^4 - 1} + \int_{1/(1+\epsilon)}^0 \frac{-dx/x^2}{(1/x)^4 - 1} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{x^4 - 1} + \int_0^{1/(1+\epsilon)} dx \frac{x^2}{1 - x^4} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{x^4 - 1} + \int_0^{1-\epsilon} dx \frac{x^2}{1 - x^4} + \int_{1-\epsilon}^{1/(1+\epsilon)} dx \frac{x^2}{1 - x^4} \right) \end{aligned}$$

¹Lapso: 2 horas (3 p.m. a 5 p.m.). Explique, *en detalle*, todos los pasos realizados. Cada problema vale 20/3.

Cuando $0 < \epsilon < 1$, se obtiene

$$0 < \int_{1-\epsilon}^{1/(1+\epsilon)} dx \frac{x^2}{1-x^4} < \frac{(1+\epsilon)^{-2}}{1-(1+\epsilon)^{-4}} \left[\frac{1}{1+\epsilon} - (1-\epsilon) \right] = (1+\epsilon) \frac{\epsilon^2}{(1+\epsilon)^4 - 1}$$

En consecuencia

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[(1+\epsilon) \frac{\epsilon^2}{(1+\epsilon)^4 - 1} \right] = 0 \quad \implies \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{1-\epsilon}^{1/(1+\epsilon)} dx \frac{x^2}{1-x^4} = 0$$

lo cual conduce a

$$P \int_0^\infty \frac{dx}{x^4 - 1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\epsilon} dx \frac{1-x^2}{x^4 - 1} = - \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}$$

En la última integral realizaremos, entonces, el cambio de variables $x = \tan \theta$ y usamos la identidad $\sec^2 \theta = \tan^2 \theta + 1$:

$$P \int_0^\infty \frac{dx}{x^4 - 1} = - \int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\tan^2 \theta + 1} = - \int_0^{\pi/4} d\theta = - \frac{\pi}{4}$$

$$P \int_0^\infty \frac{dx}{x^4 - 1} = - \frac{\pi}{4} \tag{4.1}$$

2. Considere la integral

$$P \int_0^\infty dx \frac{x^a \ln x}{x^4 - 16}, \quad a \in \mathbf{R} \tag{4.2}$$

a) Determine las condiciones que debe satisfacer el parámetro a para que la integral converga.

Respuesta: Cuando $x \rightarrow 0^+$, la integral se comporta en la forma

$$\sim - \frac{1}{16} \int dx x^a \ln x \sim - \frac{1}{16(a+1)} (x^{a+1} \ln x - x^a) = \frac{1-x \ln x}{16(a+1)} x^a, \quad a \neq -1$$

Puesto que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, es suficiente exigir que el $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a$ sea *finito*. Esto solo es posible si $a \geq 0$. Note que en el caso particular $a = -1$, la integral diverge como $-\ln^2(x)/32$ cuando $x \rightarrow 0^+$.

Cuando $x \rightarrow \infty$, la integral se comporta en la forma

$$\sim \int dx x^{a-4} \ln x = \frac{x^{a-3} \ln x - x^{a-4}}{a-3} = x^{a-4} \frac{x \ln x - 1}{a-3} \sim \frac{x^{a-3} \ln x}{a-3}, \quad a \neq 3$$

El último resultado se debe a que $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln x = \infty$. Puesto que $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$, se debe cumplir que $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{a-3} = 0$ y ello solo es posible si $a < 3$. Además

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ a < 3}} x^{a-3} \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{3-a}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{(3-a)x^{2-a}} = \frac{1}{3-a} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{3-a}} = 0$$

Note que en el caso particular $a = 3$, la integral diverge como $\ln^2(x)/2$ cuando $x \rightarrow \infty$. En conclusión, la integral (4.2) converge si $0 \leq a < 3$:

$$\text{P} \int_0^\infty dx \frac{x^a \ln x}{x^4 - 16}, \quad 0 \leq a < 3 \quad (4.3)$$

b) Evalúe la integral mediante una integración en el plano complejo.

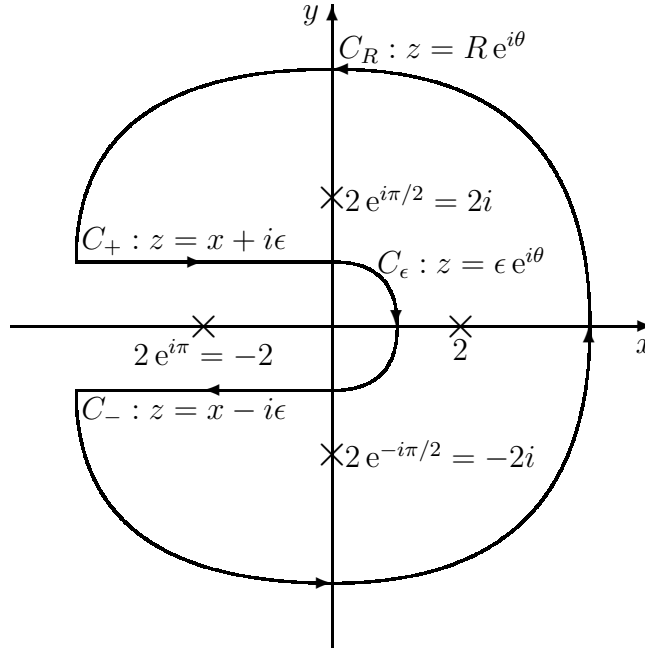


Figura 1.1: Camino de integración $C = C_R \cup C_\epsilon \cup C_+ \cup C_-$ (en sentido contrario al de las agujas del reloj) de la integral (4.4). El camino C_R es la unión de arcos de radio $R > 2$. El camino C_ϵ es una semicircunferencia de radio $\epsilon < 2$. C_\pm son paralelos al eje x . Los símbolos \times ilustran la posición los polos simples de $z^a \ln z / (z^4 - 16)$.

Respuesta: Consideremos la integral

$$\int_C dz \frac{z^a \ln^2 z}{z^4 - 16}, \quad 0 \leq a < 3 \quad (4.4)$$

donde C es el camino de integración en la Figura 1.1 y

$$z^a \ln^2 z = |z|^a e^{ia\theta(x,y)} [\ln |z| + i\theta(x,y)]^2; \quad z = x + iy \neq 0, \quad -\pi < \theta(x,y) < \pi$$

El integrando en (4.4) posee 3 polos *simples*, encerrados por el contorno C , los cuales son *ceros* del denominador $z^4 - 16$:

$$z_{>} = 2e^{i0} = 2, \quad z_{\uparrow} = 2e^{i\pi/2} = 2i, \quad z_{\downarrow} = 2e^{-i\pi/2} = -2i$$

Usando el Teorema de los Residuos, obtendremos³:

$$\begin{aligned}
& \int_C \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^a \ln^2 z}{z^4 - 16} \\
&= \lim_{z \rightarrow z_>} \frac{(z - z_>) z^a \ln^2 z}{z^4 - 16} + \lim_{z \rightarrow z_\uparrow} \frac{(z - z_\uparrow) z^a \ln^2 z}{z^4 - 16} + \lim_{z \rightarrow z_\downarrow} \frac{(z - z_\downarrow) z^a \ln^2 z}{z^4 - 16} \\
&= \frac{2^a \ln^2 2}{4 \times 2^3} + \frac{2^a e^{i\pi a/2} (\ln 2 + i\pi/2)^2}{4 \times (2i)^3} + \frac{2^a e^{-i\pi a/2} (\ln 2 - i\pi/2)^2}{4 \times (-2i)^3} \\
&= 2^{a-5} \ln^2 2 + 2\Re \left[\frac{2^a e^{i\pi a/2} (\ln 2 + i\pi/2)^2}{4 \times (2i)^3} \right] \\
&= 2^{a-5} \ln^2 2 + 2^{a-4} \Re \left[i e^{i\pi a/2} \left(\ln^2 2 - \frac{\pi^2}{4} + i\pi \ln 2 \right) \right] \\
&= 2^{a-5} \ln^2 2 + 2^{a-4} \left[\left(\frac{\pi^2}{4} - \ln^2 2 \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi a}{2} \right) - \pi \ln(2) \cos \left(\frac{\pi a}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\int_C \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^a \ln z}{z^4 - 16} = 2^{a-4} \left[\frac{1}{2} \ln^2 2 + \left(\frac{\pi^2}{4} - \ln^2 2 \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi a}{2} \right) - \pi \ln(2) \cos \left(\frac{\pi a}{2} \right) \right] \quad (4.5)$$

Estudiamos la integración a lo largo de C_R

$$\begin{aligned}
\left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_R} dz \frac{z^a \ln^2 z}{z^4 - 16} \right| &= \left| \int_{(-\pi)^+}^{\pi^-} R e^{i\theta} i d\theta \frac{R^a e^{ia\theta} (\ln R + i\theta)^2}{R^4 e^{4i\theta} - 16} \right| \\
&< \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{R^{a+1} (\ln R + |\theta|)^2}{R^4 - 16} < 2 \int_0^{\pi} d\theta \frac{R^{a-3} (\ln R + \pi)^2}{1 - 16/R^4} \\
&= 2\pi \frac{R^{a-3} (\ln R + \pi)^2}{1 - 16/R^4}
\end{aligned}$$

Puesto que

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ a < 3}} 2\pi \frac{R^{a-3} (\ln R + \pi)^2}{1 - 16/R^4} = 0,$$

se concluye

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_R} dz \frac{z^a \ln^2 z}{z^4 - 16} = 0$$

Un análisis similar puede realizarse con la integración a lo largo de C_ϵ

$$\begin{aligned}
\left| \int_{C_\epsilon} dz \frac{z^a \ln^2 z}{z^4 - 16} \right| &= \left| \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \epsilon e^{i\theta} i d\theta \frac{\epsilon^a e^{ia\theta} (\ln \epsilon + i\theta)^2}{\epsilon^4 e^{4i\theta} - 16} \right| \\
&< \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \frac{\epsilon^{a+1} (|\ln \epsilon| + |\theta|)^2}{16 - \epsilon^4} < 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\epsilon^{a+1} (|\ln \epsilon| + \pi/2)^2}{16 - \epsilon^4}
\end{aligned}$$

³ $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0) z^a \ln^2 z}{z^4 - 16} = \frac{z_0^a \ln^2 z_0}{4z_0^3}$

$$= \pi \frac{\epsilon^{a+1} (|\ln \epsilon| + \pi/2)^2}{16 - \epsilon^4}$$

Puesto que

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ a \geq 0}} \pi \frac{\epsilon^{a+1} (|\ln \epsilon| + \pi/2)^2}{16 - \epsilon^4} = 0,$$

se concluye

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_\epsilon} dz \frac{z^a \ln^2 z}{z^4 - 16} = 0$$

Con estos resultados, podemos afirmar que

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_C \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^a \ln^2 z}{z^4 - 16} \\ & \quad \text{a lo largo de } C_+ \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 dx \frac{(-x)^a [\ln(-x) + i\pi]^2}{(x^2 + 4)(x - 2)(x + i0^+ + 2)} \\ & \quad + \\ & \quad \text{a lo largo de } C_- \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} dx \frac{(-x)^a [\ln(-x) - i\pi]^2}{(x^2 + 4)(x - 2)(x - i0^+ + 2)} \\ &= \frac{1}{\pi} \Im \int_0^{-\infty} dx \frac{(-x)^a [\ln(-x) - i\pi]^2}{(x^2 + 4)(x - 2)(x + 2 - i0^+)} \\ &= -\frac{1}{\pi} \Im \int_0^{\infty} dx \frac{x^a (\ln x - i\pi)^2}{(x^2 + 4)(-x - 2)(-x + 2 - i0^+)} \\ &= -\frac{1}{\pi} \Im \int_0^{\infty} dx \frac{x^a (\ln x - i\pi)^2}{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2 + i0^+)} \\ &= -\frac{1}{\pi} \Im \left\{ \text{P} \int_0^{\infty} dx \frac{x^a (\ln x - i\pi)^2}{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)} - i\pi \frac{x^a (\ln x - i\pi)^2}{(x^2 + 4)(x + 2)} \Big|_{x=2} \right\} \\ &= -\frac{1}{\pi} \Im \left\{ \text{P} \int_0^{\infty} dx \frac{x^a (\ln x - i\pi)^2}{x^2 - 16} - i\pi \frac{2^a (\ln 2 - i\pi)^2}{32} \right\} \end{aligned}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_C \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^a \ln^2 z}{z^4 - 16} = 2 \text{P} \int_0^{\infty} dx \frac{x^a \ln x}{x^2 - 16} + 2^{a-5} (\ln^2 2 - \pi^2)$$

Comparando este resultado con (4.5), se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \text{P} \int_0^\infty dx \frac{x^a \ln x}{x^4 - 16} \\
 & = \\
 & 2^{a-5} \left[\frac{\pi^2}{2} + \left(\frac{\pi^2}{4} - \ln^2 2 \right) \text{sen} \left(\frac{\pi a}{2} \right) - \pi \ln(2) \cos \left(\frac{\pi a}{2} \right) \right], \quad 0 \leq a < 3
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

3. Obtenga la forma asintótica de $\binom{2n}{n}$ cuando $n \rightarrow \infty$. $n \in \mathbf{N}$.

Respuesta: Usando la *Fórmula de Stirling*

$$N! \approx N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}, \quad N \in \mathbf{N}, \quad N \gg 1$$

se obtiene

$$\binom{2n}{n} \equiv \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \approx \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2\pi(2n)}}{(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})^2} = \frac{2^{2n} n^{2n} e^{-2n} \times 2 \sqrt{\pi n}}{n^{2n} e^{-2n} (2\pi n)}$$

$$\binom{2n}{n} \approx \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}, \quad n \gg 1 \tag{4.7}$$

Examen Parcial 2

Expansiones Asintóticas y Ecuación de Laplace

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

lunes 11 de agosto de 2004
Prof. Félix Marín
Métodos Matemáticos de la Física II
<http://fisica.ciens.ucv.ve/felix/>
2º Examen Parcial¹

SOLUCIÓN

1. Encuentre una expresión asintótica para la integral

$$\int_0^{\infty} dx \frac{e^{-x/\lambda}}{\sqrt{x^2 + a^2}}; \quad \lambda, a \in \mathbf{R}, \quad \lambda > 0, \quad a \neq 0$$

en el caso límite $|a| \ll \lambda$. La expresión asintótica debe constar, al menos, de cuatro (4) términos. (6 puntos)

Respuesta: Ver problema 1 de la Tarea 3 en pág. 23.

2. Encuentre la solución de la ecuación de Laplace $\nabla^2 \Phi(x, y, z) = 0$ en la región

$$\mathcal{R} \equiv \left\{ (x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < a, \quad |y| < x \right\}, \quad a > 0$$

$\Phi(x, y, z)$ satisface las condiciones de frontera

$$\Phi(x, y, z) = V_0 \quad \text{si } y = \pm x; \quad \Phi(x, y, z) = 0 \quad \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} = a$$

La expresión *final* de la solución debe ser expresada en *forma cerrada* (no en términos de una serie) en función de las coordenadas cartesianas x, y y z . (8 puntos)

¹**Fecha de Entrega:** lunes 18 de agosto de 2003. Explique, en detalle, los pasos realizados. No se aceptarán exámenes realizados en computador.

Respuesta: En vista del planteamiento del problema, la solución es independiente de la variable z y se reduce a un problema bidimensional en el plano xy el cual plantearemos en coordenadas polares en tal plano ($\Phi(x, y, z) \equiv \Phi(r, \theta)$). Ver Figura 2.1.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r \geq 0, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

La solución general es de la forma

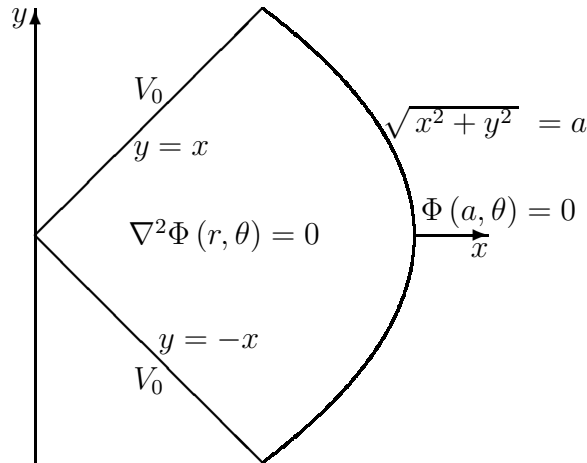


Figura 2.1: En el interior de esta región (según el planteamiento de arriba), resolvemos la ecuación de Laplace bidimensional $\nabla^2\Phi(r, \theta) = 0$.

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) = & \left[A_0 + B_0 \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right] (C\theta + D) \\ & + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sin(n\theta + \phi_n) \left(\frac{r}{a} \right)^n + B_n \sin(n\theta + \delta_n) \left(\frac{a}{r} \right)^n \right] \end{aligned}$$

A_n y B_n son constantes independientes de r y θ , $\forall n = 0, 1, 2, \dots$. Así mismo, ϕ_n y δ_n son constantes independientes de r y θ , $\forall n = 1, 2, 3, \dots$ y C y D son constantes independientes de r y θ ,

Para que la solución sea *finita* en el límite $r \rightarrow 0^+$, escogeremos $B_n = 0$, $\forall n = 0, 1, 2, \dots$. La solución se reduce, con $A_0 = 1$, a

$$\Phi(r, \theta) = C\theta + D + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a} \right)^n \sin(n\theta + \phi_n)$$

Para lograr que la solución sea invariante bajo el cambio $\theta \rightarrow -\theta$ (una simetría evidente de este problema) escogemos $\phi_n = -\pi/2$, $\forall n = 1, 2, \dots$ y $C = 0$. La solución se reduce a

$$\Phi(r, \theta) = D - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a} \right)^n \cos(n\theta)$$

Al imponer la condición de frontera en los segmentos donde $y = \pm x$ (ver Figura 2.1) se obtiene

$$\begin{aligned}
V_0 &= D - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos\left(n \frac{\pi}{4}\right) \\
&= D - \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} \cos\left([2n+1] \frac{\pi}{4}\right) \\
&= D - \sum_{n=1}^{\infty} A_{4n} \left(\frac{r}{a}\right)^{4n} \overbrace{\cos(n\pi)}^{=(-1)^n} - \sum_{n=0}^{\infty} A_{4n+2} \left(\frac{r}{a}\right)^{4n+2} \overbrace{\cos\left([2n+1] \frac{\pi}{2}\right)}{=0} \\
&\quad - \\
&\quad \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} \cos\left([2n+1] \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

Esta expresión puede ser *satisfecha* idénticamente con

$$D = V_0; \quad A_{4n+4} = A_{2n+1} = 0, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Por tanto, la solución se reduce a

$$\Phi(r, \theta) = V_0 - \sum_{n=0}^{\infty} A_{4n+2} \left(\frac{r}{a}\right)^{4n+2} \cos([4n+2]\theta)$$

Imponiendo la condición de frontera en el arco con ($r = a$) (ver Figura 2.1)

$$0 = V_0 - \sum_{n=0}^{\infty} A_{4n+2} \cos([4n+2]\theta)$$

Multiplicando ambos miembros por $\cos([4n+2]\theta)$ e integrando sobre el intervalo $[-\pi/4, \pi/4]$:

$$0 = V_0 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \cos([4n+2]\theta) - \sum_{n'=0}^{\infty} A_{4n'+2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \cos([4n+2]\theta) \cos([4n'+2]\theta)$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \cos([4n+2]\theta) = 2 \frac{\text{sen}([4n+2]\theta)}{4n+2} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\text{sen}(n\pi + \pi/2)}{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \cos([4n+2]\theta) \cos([4n'+2]\theta)$$

=

$$\int_0^{\pi/4} d\theta \{ \cos([4n+4n'+4]\theta) + \cos([4n-4n']\theta) \}$$

=

$$2\delta_{nn'} \int_0^{\pi/4} d\theta \cos^2([4n+2]\theta) = \delta_{nn'} \int_0^{\pi/4} d\theta \{ 1 + \cos([8n+4]\theta) \} = \frac{\pi}{4} \delta_{nn'}$$

Con la evaluación de estas integrales se obtiene

$$0 = V_0 \frac{(-1)^n}{2n+1} - A_{4n+2} \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad A_{4n+2} = \frac{4V_0}{\pi} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Con este resultado se obtiene la solución como una serie la cual sumaremos para expresar el resultado en *forma cerrada*

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) &= V_0 - \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{4n+2} \cos([4n+2]\theta) \\ &= V_0 - \frac{4V_0}{\pi} \Re \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{4n+2} e^{i(4n+2)\theta} \\ &= V_0 - \frac{4V_0}{\pi} \Re \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{r e^{i\theta}}{a}\right)^{4n+2} \end{aligned}$$

Pero

$$\left(e^{i\pi/4}\right)^{4n+2} = e^{in\pi} e^{i\pi/2} = (-1)^n i \quad \Longrightarrow \quad (-1)^n = -i \left(e^{i\pi/4}\right)^{4n+2}$$

$$\Phi(r, \theta) = V_0 - \frac{4V_0}{\pi} \Im \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[r e^{i(\theta+\pi/4)}/a]^{4n+2}}{2n+1} = V_0 - \frac{4V_0}{\pi} \Im \varphi(Z), \quad Z \equiv \frac{r}{a} e^{i(\theta+\pi/4)}$$

donde

$$\varphi(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+2}}{2n+1} \quad \Longrightarrow \quad \left(\varphi'(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n+1}, \quad \varphi(0) = 0 \right)$$

$$\varphi'(z) = \frac{2z}{1-z^4} = \frac{2z}{(1-z^2)(1+z^2)} = \frac{z}{1-z^2} + \frac{z}{1+z^2}$$

Integrando, con la condición de frontera $\varphi(0) = 0$, esta ecuación diferencial

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2} \ln(1-z^2) + \frac{1}{2} \ln(1+z^2) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)$$

$$\begin{aligned} \Im \varphi(Z) &= -\frac{1}{2} \Im \ln\left(\frac{1-Z^2}{1+Z^2}\right) = -\frac{1}{2} \Im \ln\left(\frac{[1-Z^2][1+Z^{*2}]}{|1+Z^2|^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \Im \ln\left(\frac{1+Z^{*2}-Z^2-|Z|^4}{|1+Z^2|^2}\right) = -\frac{1}{2} \Im \ln\left(\frac{1-|Z|^4-2i \Im[Z^2]}{|1+Z^2|^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{-2 \Im[Z^2]}{1-|Z|^4}\right) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2 \Im[Z^2]}{1-|Z|^4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{4XY}{1-[X^2+Y^2]^2}\right) \end{aligned}$$

con

$$Z \equiv X + iY; \quad X = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{x-y}{a}, \quad Y = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{x+y}{a}$$

Así mismo

$$4XY = 2 \frac{x^2 - y^2}{a^2}, \quad X^2 + Y^2 = \frac{x^2 + y^2}{a^2}$$

La solución es

$$\Phi(r, \theta) = \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{2a^2 [x^2 - y^2]}{a^4 - [x^2 + y^2]^2} \right) \right\} V_0 \quad (4.1)$$

con

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta; \quad 0 < r < a, \quad |\theta| < \frac{\pi}{4}$$

3. Si se sabe que $\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = 0$ cuando $a < r < b$ y $\Phi(b, \theta) - \Phi(a, \theta) = V$. $\vec{r} = (r, \theta)$. $x = r \cos \theta$. $y = r \sin \theta$. $r \geq 0$. $0 \leq \theta < 2\pi$. $\Phi(b, \theta)$ y $\Phi(a, \theta)$ son independientes de θ :

- a) Calcule $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \Phi(\vec{r})$ en la región acotada por las circunferencias mencionadas arriba.

Respuesta: La solución general para $\Phi(r, \theta)$ es de la forma

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) = & \left[A_0 + B_0 \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right] (C\theta + D) \\ & + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sin(n\theta + \phi_n) \left(\frac{r}{a} \right)^n + B_n \sin(n\theta + \delta_n) \left(\frac{a}{r} \right)^n \right] \end{aligned}$$

A_n y B_n son constantes independientes de r y θ , $\forall n = 0, 1, 2, \dots$. Así mismo, ϕ_n y δ_n son constantes independientes de r y θ , $\forall n = 1, 2, 3, \dots$ y C y D son constantes independientes de r y θ .

Puesto que la solución debe ser independiente de θ , nosotros escogemos

$$C = 0, \quad D = 1; \quad A_n = B_n = 0 \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

La solución se reduce a

$$\Phi(r) \equiv \Phi(r, \theta) = A_0 + B_0 \ln \left(\frac{r}{a} \right) \implies \begin{cases} \Phi(a) = A_0 \\ \Phi(b) = A_0 + B_0 \ln \left(\frac{b}{a} \right) \end{cases}$$

y por lo tanto

$$\Phi(r) = \Phi(a) + \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} V$$

En consecuencia³

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(r) = -\frac{V}{\ln(b/a)} \frac{\hat{r}}{r} = -\frac{V}{\ln(b/a)} \frac{\vec{r}}{r^2} \quad (4.2)$$

- b) Verifique explícitamente que la solución satisface la ecuación de Laplace Bidimensional y que (a lo largo de cualquier camino entre las circunferencias)

$$V = -\int_{a < r < b} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}, \quad (\text{¡ Verificar explícitamente !})$$

(6 puntos)

Respuesta: Demostremos que la solución satisface la ecuación de Laplace. Para ello, usaremos la identidad

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) = (\nabla\varphi) \cdot \vec{A} + \varphi \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi(r)|_{a < r < b} &= \nabla \cdot [\nabla\Phi(r)] = -\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{V}{\ln(b/a)} \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) \\ &= \frac{V}{\ln(b/a)} \left[\nabla \left(\frac{1}{r^2} \right) \cdot \vec{r} + \left(\frac{1}{r^2} \right) \underbrace{\nabla \cdot \vec{r}}_{=2} \right] \\ &= \frac{V}{\ln(b/a)} \left(\frac{-2}{r^3} \hat{r} \cdot \vec{r} + \frac{2}{r^2} \right) \end{aligned}$$

$$\nabla^2\Phi(r) = 0, \quad a < r < b \quad (4.3)$$

Realizemos la integración, mencionada arriba *a lo largo de un camino arbitrario:*

$$\begin{aligned} -\int_{a < r < b} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \frac{V}{\ln(b/a)} \int_{a < r < b} \frac{1}{r^2} \vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{V}{\ln(b/a)} \int_{a < r < b} \frac{1}{2r^2} d(\vec{r} \cdot \vec{r}) \\ &= \frac{V}{\ln(b/a)} \int_{a < r < b} \frac{1}{2r^2} d(r^2) = \frac{V}{\ln(b/a)} \int_{a < r < b} \frac{1}{2r^2} 2r dr \\ &= \frac{V}{\ln(b/a)} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{V}{\ln(b/a)} (\ln b - \ln a) \end{aligned}$$

³El gradiente de una función $f(r)$ que solo depende de r adquiere la forma:

$$\nabla f(r) = \frac{df(r)}{dr} \hat{r}, \quad \hat{r} \equiv \frac{\vec{r}}{r}$$

En efecto,

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{df(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{df(r)}{dr} \frac{1}{2r} \frac{\partial (r^2)}{\partial x} = \frac{df(r)}{dr} \frac{1}{2r} \frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial x} = \frac{df(r)}{dr} \frac{x}{r}$$

Similarmente, se demuestra que $\partial f(r)/\partial y = [df(r)/dr] (y/r)$ lo cual completa la demostración.

$$-\int_{a < r < b} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = V$$

(4.4)

Examen Parcial 3

Examen Final: Ecuación de Laplace en Tres Dimensiones y Delta de Dirac

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

miércoles 20 de agosto de 2003
Prof. Félix Marín
Métodos Matemáticos de la Física II
<http://fisica.ciens.ucv.ve/felix/>
3º Examen Parcial¹

Examen Final (SOLUCIÓN)

1. Resuelva la ecuación de Laplace $\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = 0$ en el *interior* de la semiesfera

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < a^2, \quad z > 0 \right\}, \quad a > 0$$

$\Phi(\vec{r})$ satisface las condiciones de frontera

$$\Phi(\vec{r})|_{z=0} = 0, \quad \Phi(\vec{r})|_{r=a} = \Phi_0,$$

Respuesta: Obviamente, el problema planteado posee simetría azimutal: La solución es independiente² de ϕ o, en otras palabras, la solución permanece invariante bajo una rotación arbitraria del sistema de coordenadas alrededor del eje z . Por lo tanto ($\Phi(r, \theta) \equiv \Phi(\vec{r})$), la solución general es de la forma

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[A_{\ell} \left(\frac{r}{a} \right)^{\ell} + B_{\ell} \left(\frac{a}{r} \right)^{\ell+1} \right] P_{\ell}(\cos \theta)$$

A_{ℓ} y B_{ℓ} son constantes independientes de r y θ , $\forall \ell = 0, 1, 2, \dots$. $P_{\ell}(\xi)$ es el *polinomio de Legendre* de orden ℓ con $\ell = 0, 1, 2, \dots$ y $\xi \in [-1, 1]$.

Puesto que la solución debe permanecer *finita*³ cuando $r \rightarrow 0^+$, escogeremos $B_{\ell} = 0$, $\forall \ell = 0, 1, 2, \dots$. La solución se reduce a

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} \left(\frac{r}{a} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$$

¹De 2:00 p.m. a 4:30 p.m.. Cada problema vale 20/3 puntos.

² $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$ y $z = r \cos \theta$ con $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$ (Coordenadas Esféricas).

³Las condiciones de frontera son finitas.

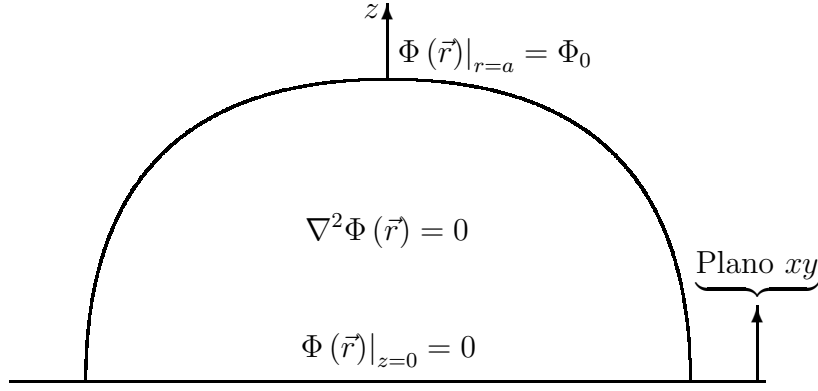


Figura 3.1: Ilustración de la región \mathcal{S}

Al imponer la condición de frontera cuando $z \rightarrow 0^+$, $0 \leq r \leq a$, se obtiene⁴

$$0 = \Phi\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} \left(\frac{r}{a}\right)^{\ell} P_{\ell}\left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}\right) = \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ par}}}^{\infty} A_{\ell} \left(\frac{r}{a}\right)^{\ell} P_{\ell}(0)$$

Esta condición de frontera se satisface idénticamente si se escoge $A_{\ell} = 0$, $\forall \ell$ par. Por tanto

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{2\ell+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{2\ell+1} P_{2\ell+1}(\cos \theta)$$

Al imponer la condición de frontera cuando $r \rightarrow a^-$, $0 \leq \theta < \pi/2$, se obtiene

$$\Phi_0 = \Phi(a, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{2\ell+1} P_{2\ell+1}(\cos \theta)$$

Multiplicando ambos miembros por el factor $\sin(\theta) P_{2\ell+1}(\cos \theta)$ e integrando en el intervalo $[0, \pi/2)$, obtendremos

$$\Phi_0 \int_0^{\pi/2} d\theta \sin(\theta) P_{2\ell+1}(\cos \theta) = \sum_{\ell'=0}^{\infty} A_{2\ell'+1} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin(\theta) P_{2\ell+1}(\cos \theta) P_{2\ell'+1}(\cos \theta)$$

Evaluando las integrales⁵

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \sin(\theta) P_{2\ell+1}(\cos \theta) = - \int_1^0 d\xi P_{2\ell+1}(\xi) = \int_0^1 d\xi P_{2\ell+1}(\xi)$$

⁴ $P_{\ell}(\xi)$ es una función *par* (*impar*) de ξ si ℓ es un número *par* (*impar*). Por lo tanto, $P_{\ell}(0) = 0$ si ℓ es impar.

⁵Los polinomios de Legendre son *ortogonales* en el intervalo $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^1 d\xi P_{\ell}(\xi) P_{\ell'}(\xi) = \frac{2\delta_{\ell\ell'}}{2\ell+1}, \quad \ell, \ell' = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\pi/2} d\theta \operatorname{sen}(\theta) P_{2\ell+1}(\cos\theta) P_{2\ell'+1}(\cos\theta) \\
&= - \int_1^0 d\xi P_{2\ell+1}(\xi) P_{2\ell'+1}(\xi) = \int_0^1 d\xi P_{2\ell+1}(\xi) P_{2\ell'+1}(\xi) \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\xi P_{2\ell+1}(\xi) P_{2\ell'+1}(\xi) = \frac{1}{2} \frac{2\delta_{2\ell+1,2\ell'+1}}{2(2\ell+1)+1} = \frac{\delta_{\ell\ell'}}{4\ell+3}
\end{aligned}$$

Con estos resultados se obtiene

$$A_{2\ell+1} = \Phi_0 (4\ell+3) \int_0^1 d\xi P_{2\ell+1}(\xi), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\Phi(r, \theta) &= \Phi_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} (4\ell+3) \left[\int_0^1 d\xi P_{2\ell+1}(\xi) \right] \left(\frac{r}{a} \right)^{2\ell+1} P_{2\ell+1}(\cos\theta) \\
&0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

(4.1)

2. Resuelva la ecuación diferencial

$$y'(x) = -\delta(x), \quad x \in \mathbf{R}$$

$y(x)$ satisface la condición

$$y(x) = 0 \quad \text{si } x > 0$$

Respuesta: Integrando ambos miembros de la ecuación diferencial en $(-\infty, x]$, obtendremos

$$y(x) - y(-\infty) = - \int_{-\infty}^x d\xi \delta(\xi)$$

Pero

$$\int_{-\infty}^x d\xi \delta(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \implies \quad \int_{-\infty}^x d\xi \delta(\xi) = \Theta(x)$$

Por tanto

$$y(x) = y(-\infty) - \Theta(x)$$

Pero

$$0 = y(x)|_{x>0} = y(-\infty) - \Theta(x)|_{x>0} = y(-\infty) - 1 \quad \implies \quad y(-\infty) = 1$$

Luego

$$y(x) = 1 - \Theta(x) = \Theta(-x)$$

(4.2)

3. Evalúe la integral

$$\int_0^{\infty} dx \cos^3(\pi x) \delta(x^4 - 1)$$

Respuesta: Realizando el cambio de variables

$$x = (1 + z)^{1/4} \quad \implies \quad z = x^4 - 1$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx \cos^3(\pi x) \delta(x^4 - 1) &= \int_{-1}^{\infty} \frac{1}{4} (1 + z)^{-3/4} dz \cos^3(\pi [1 + z]^{1/4}) \delta(z) \\ &= \frac{1}{4} (1 + z)^{-3/4} \cos^3(\pi [1 + z]^{1/4}) \Big|_{z=0} = \frac{1}{4} \cos^3 \pi \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{\infty} dx \cos^3(\pi x) \delta(x^4 - 1) = -\frac{1}{4}} \quad (4.3)$$

Otra forma de realizar la integral consiste en el uso de la identidad:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad f(x_i) = 0$$

donde la suma se realiza sobre el conjunto de *raíces reales* $\{x_i\}$ de la ecuación $f(x) = 0$. En efecto

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx \cos^3(\pi x) \delta(x^4 - 1) &= \int_0^{\infty} dx \cos^3(\pi x) \left[\frac{\delta(x + 1)}{4} + \frac{\delta(x - 1)}{4} \right] \\ &= \frac{1}{4} \overbrace{\int_0^{\infty} dx \cos^3(\pi x) \delta(x + 1)}^{= 0} + \frac{1}{4} \overbrace{\int_0^{\infty} dx \cos^3(\pi x) \delta(x - 1)}^{= \cos^3(\pi \times 1)} \\ &= \boxed{-\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Parte III

Apéndices

Apéndice A

Evaluación de integrales de la forma¹

$$\int_0^\infty dx x^{a-1} Q(x)$$

A.1. Sin polos en $\{(x, 0) \mid x > 0\}$

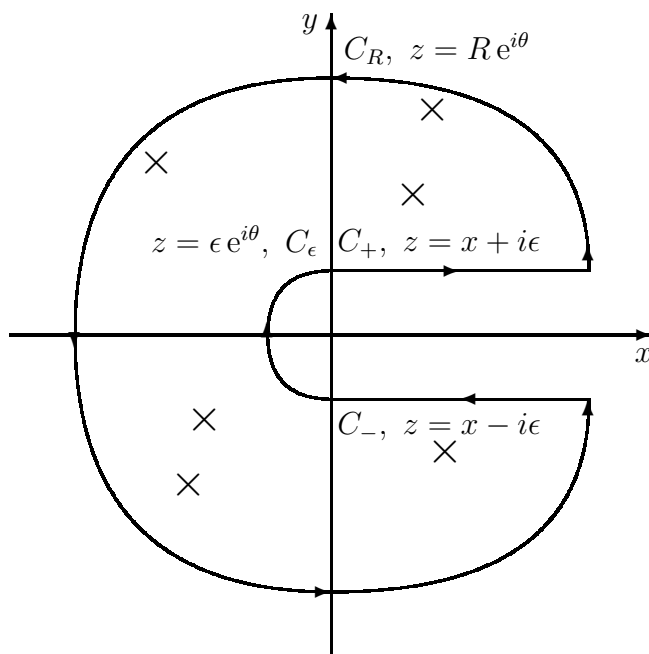


Figura A.1: Camino de integración $C = C_R \cup C_\epsilon \cup C_+ \cup C_-$ (en sentido contrario al de las agujas del reloj) de la integral (A.1). El camino C_R es la union de arcos de radio $R > 1$. El camino C_ϵ es una semicircunferencia de radio $\epsilon < 1$. C_\pm son paralelos al eje x . La función $Q(x)$ en el integrando de (A.1) *no tiene* polos en el semiejereal positivo $\{(x, 0) \mid x > 0\}$. Los símbolos \times ilustran la posición de algunos de los polos de $Q(z)$.

¹Esta nota resume, esencialmente, la sección 6.24 “ *Evaluation of integrals of the form $\int_0^\infty dx x^{a-1} Q(x)$ ” de la referencia[Whittaker] Págs. 117-119.*

Consideremos la evaluación de la integral

$$\int_0^{\infty} dx x^{a-1} Q(x) \quad (\text{A.1})$$

donde

1. $Q(x)$ es una función racional de x tal que no posee polos en el semieje positivo del eje real y
- 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^a Q(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^a Q(x) = 0$$

A.1.1. Evaluación

Considere la integral, a lo largo del camino C , en el plano complejo (ver Figura A.1)

$$\mathcal{I} \equiv \int_C dz z^{a-1} Q(z) = 2\pi i \sum_{\text{polos} \subset R_C} \text{res} \left(z^{a-1} Q(z) \right) \quad (\text{A.2})$$

donde

$$z^k \equiv |z|^k e^{ik\theta(x,y)}, \quad 0 < \theta(x,y) < 2\pi, \quad z \neq 0 \quad (\text{A.3})$$

y $\sum_{\text{polos}} \text{res} (z^{a-1} Q(z))$ es la suma de los residuos de $z^{a-1} Q(z)$ en los polos de esta en la región R_C la cual es aquella delimitada por el contorno de integración C .

Integración a lo largo de C_ϵ

$$\left| \int_{C_\epsilon} dz z^{a-1} Q(z) \right| = \left| \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \epsilon e^{i\theta} i d\theta \epsilon^{a-1} e^{i(a-1)\theta} Q(\epsilon e^{i\theta}) \right| \leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \epsilon^a |Q(\epsilon e^{i\theta})|$$

Por tanto

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} dz z^{a-1} Q(z) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Integración a lo largo de C_R

$$\left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_R} dz z^{a-1} Q(z) \right| = \left| \int_{0^+}^{(2\pi)^-} R e^{i\theta} i d\theta R^{a-1} e^{i(a-1)\theta} Q(R e^{i\theta}) \right| \leq \int_0^{2\pi} d\theta R^a |Q(R e^{i\theta})|$$

Por tanto

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_R} dz z^{a-1} Q(z) = 0 \quad (\text{A.5})$$

En consecuencia; usamos los resultados (A.2), (A.4) y (A.5) para obtener²

$$\begin{aligned}
2\pi i \sum_{\text{polos} \subset R_C} \text{res} \left(z^{a-1} Q(z) \right) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{C_+} dz z^{a-1} Q(z) + \int_{C_-} dz z^{a-1} Q(z) \right] \\
&= \underbrace{\int_0^\infty dx x^{a-1} Q(x + i0^+)}_{\text{a lo largo de } C_+} \\
&\quad + \\
&\quad \underbrace{\int_\infty^0 dx x^{a-1} e^{i(a-1)2\pi} Q(x - i0^+)}_{\text{a lo largo de } C_-}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

En este caso particular (ver pie de página 2) se satisface $Q(x \pm i0^+) = Q(x)$, $\forall x > 0$. Por tanto

$$\begin{aligned}
2\pi i \sum_{\text{polos}} \text{res} \left(z^{a-1} Q(z) \right) &= (1 - e^{2\pi ai}) \int_0^\infty dx x^{a-1} Q(x) \\
&= e^{\pi ai} (e^{-\pi ai} - e^{\pi ai}) \int_0^\infty dx x^{a-1} Q(x) \\
&= e^{\pi ai} [-2i \text{sen}(\pi a)] \int_0^\infty dx x^{a-1} Q(x) \\
&= 2i e^{i\pi(a-1)} \text{sen}(\pi a) \int_0^\infty dx x^{a-1} Q(x)
\end{aligned}$$

$$\int_0^\infty dx x^{a-1} Q(x) = \pi \text{cosec}(\pi a) \sum_{\text{polos} \subset R_C} \text{res} \left((-z)^{a-1} Q(z) \right) \tag{A.7}$$

$Q(z)$ es una función racional sin polos en $\{(x, 0) \mid x > 0\}$

Note que $z^{a-1}/e^{i(a-1)\pi} = (z/e^{i\pi})^{a-1} = (-z)^{a-1}$ puesto que, de acuerdo a la definición (A.3), $-1 = e^{i\pi}$.

²Aquí usamos las identidades ($a < b$ y $f(z)$ no tiene polos en $\{(x, 0) \mid x > 0\}$)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b dx' \frac{f(x')}{x' - x \pm i\epsilon} \equiv \int_a^b dx' \frac{f(x')}{x' - x \pm i0^+} = P \int_a^b dx' \frac{f(x')}{x' - x} \mp i\pi f(x) \Theta(x - a) \Theta(b - x)$$

Note que, cuando $x \notin (a, b)$, es redundante el uso de la parte principal. Es decir:

$$\int_a^b dx' \frac{f(x')}{x' - x \pm i0^+} = \int_a^b dx' \frac{f(x')}{x' - x}, \quad x \notin (a, b)$$

A.2. Con polos simples³ en $\{(x, 0) \mid x > 0\}$

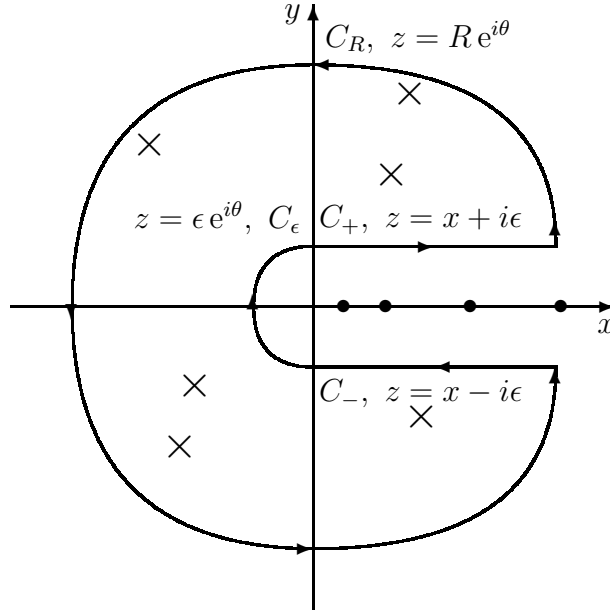


Figura A.2: Camino de integración $C = C_R \cup C_\epsilon \cup C_+ \cup C_-$ (en sentido contrario al de las agujas del reloj) de la integral (A.1). El camino C_R es la unión de arcos de radio $R > 1$. El camino C_ϵ es una semicircunferencia de radio $\epsilon < 1$. C_\pm son paralelos al eje x . La función $Q(x)$ en el integrando de (A.1) *tiene polos simples* en el semieje real positivo $\{(x, 0) \mid x > 0\}$. Los símbolos \times ilustran la posición de algunos de los polos de $Q(z)$. Los símbolos \bullet ilustran la posición de algunos de los polos de $Q(z)$ a lo largo de $\{(x, 0) \mid x > 0\}$.

En este caso, es necesario continuar la evaluación de la integral a partir de la expresión (A.6) puesto que $Q(x \pm i0^+) \neq Q(x)$. $Q(z)$ es de la forma

$$Q(z) = S(z) \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{A_\ell}{z - x_\ell}, \quad z \in \mathbf{C}; \quad x_\ell > 0, \quad x_\ell \neq x_{\ell'} \text{ si } \ell \neq \ell', \quad \ell, \ell' = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$S(z)$ es una función racional que no tiene polos en $\{(x, 0) \ni x > 0\}$ y A_ℓ 's son constantes independientes de z .

Evaluemos las integrales en (A.6):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx x^{a-1} Q(x \pm i0^+) &= \sum_{\ell=0}^\infty A_\ell \int_0^\infty dx \frac{x^{a-1} S(x \pm i0^+)}{x \pm i0^+ - x_\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^\infty A_\ell P \int_0^\infty dx \frac{x^{a-1} S(x)}{x - x_\ell} \mp i\pi \sum_{\ell=0}^\infty A_\ell x_\ell^{a-1} S(x_\ell) \end{aligned}$$

³Ver Figura A.2.

$$\boxed{\int_0^\infty dx x^{a-1} Q(x \pm i0^+) = P \int_0^\infty dx x^{a-1} Q(x) \mp i\pi \sum_{\text{polos} \in \{(x,0) \mid x>0\}} \text{res} (z^{a-1} Q(z))} \quad (\text{A.8})$$

Al continuar la evaluación a partir de la expresión (A.6), se obtiene

$$\begin{aligned} & 2\pi i \sum_{\text{polos} \subset R_C} \text{res} (z^{a-1} Q(z)) \\ &= P \int_0^\infty dx x^{a-1} Q(x) - i\pi \sum_{\text{polos} \in \{(x,0) \mid x>0\}} \text{res} (z^{a-1} Q(z)) \\ & - \\ & e^{2\pi ai} \left[P \int_0^\infty dx x^{a-1} Q(x) + i\pi \sum_{\text{polos} \in \{(x,0) \mid x>0\}} \text{res} (z^{a-1} Q(z)) \right] \\ &= (1 - e^{2\pi ai}) P \int_0^\infty dx x^{a-1} Q(x) - i\pi (1 + e^{2\pi ai}) \sum_{\text{polos} \in \{(x,0) \mid x>0\}} \text{res} (z^{a-1} Q(z)) \\ &= e^{i\pi a} (e^{-i\pi a} - e^{i\pi a}) P \int_0^\infty dx x^{a-1} Q(x) - i\pi e^{i\pi a} (e^{-i\pi a} + e^{i\pi a}) \sum_{\text{polos} \in \{(x,0) \mid x>0\}} \text{res} (z^{a-1} Q(z)) \\ &= 2i e^{i\pi(a-1)} \text{sen}(\pi a) P \int_0^\infty dx x^{a-1} Q(x) + 2i\pi e^{i\pi(a-1)} \cos(\pi a) \sum_{\text{polos} \in \{(x,0) \mid x>0\}} \text{res} (z^{a-1} Q(z)) \end{aligned}$$

$$\boxed{P \int_0^\infty dx x^{a-1} Q(x) = \pi \text{cosec}(\pi a) \sum_{\text{polos} \subset R_C} \text{res}((-z)^{a-1} Q(z)) - \pi \cotan(\pi a) \sum_{\text{polos} \in \{(x,0) \mid x>0\}} \text{res}(z^{a-1} Q(z))} \quad (\text{A.9})$$

A.3. Ejemplos⁴

A.3.1. $\int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{1+x} = ?$, $0 < a < 1$

Puesto que $\lim_{x \rightarrow 0} x^a / (1+x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a / (1+x) = 0$, se obtiene como aplicación de (A.9)

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{1+x} = \pi \text{cosec}(\pi a) \lim_{z \rightarrow -1} \left[(z+1) \frac{(-z)^{a-1}}{1+z} \right]$$

⁴Ver ejemplos en la referencia en pie de página 1.

$$\boxed{\int_0^{\infty} dx \frac{x^{a-1}}{1+x} = \pi \operatorname{cosec}(\pi a)} \quad (\text{A.10})$$

A.3.2. $\text{P} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{a-1}}{1-x} = ?$, $0 < a < 1$

Puesto que $\lim_{x \rightarrow 0} x^a / (1-x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a / (1-x) = 0$, se obtiene como aplicación de (A.9)

$$\text{P} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{a-1}}{1-x} = \pi \operatorname{cosec}(\pi a) \overbrace{\sum_{\text{polos} \subset R_C} \operatorname{res} \left(\frac{(-z)^{a-1}}{1-z} \right)}^{=0} - \pi \operatorname{cotan}(\pi a) \overbrace{\lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \frac{z^{a-1}}{1-z} \right]}^{=-1}$$

$$\boxed{\text{P} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{a-1}}{1-x} = \pi \operatorname{cotan}(\pi a)} \quad (\text{A.11})$$

Note que esta integración es usualmente realizada en forma directa como

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} dx \frac{|x|^{a-1} e^{i(a-1) \times 0}}{1 - (x + i0^+)} + \int_0^{\infty} dx \frac{|x|^{a-1} e^{i(a-1) \times 2\pi}}{1 - (x - i0^+)} \\ & + \left(\text{integrales que se anulan en los límites } R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0^+ \right) \\ & = 0, \quad \left(\text{Teorema de Los Residuos} \right) \end{aligned}$$

donde el límite $\epsilon \rightarrow 0^+$ se ha tomado en los numeradores de los integrandos. Por tanto

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_0^{\infty} dx \frac{x^{a-1}}{x-1+i0^+} + \int_0^{\infty} dx \frac{x^{a-1} e^{2\pi a i}}{x-1-i0^+} \\ &= - \left(\text{P} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{a-1}}{x-1} - i\pi \right) + e^{2\pi a i} \left(\text{P} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{a-1}}{x-1} + i\pi \right) \\ &= (e^{2\pi a i} - 1) \text{P} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{a-1}}{x-1} + i\pi (e^{2\pi a i} + 1) \end{aligned}$$

con lo cual se obtiene el resultado (A.11):

$$\text{P} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{a-1}}{1-x} = i\pi \frac{e^{2\pi a i} + 1}{e^{2\pi a i} - 1} = i\pi \frac{e^{\pi a i} + e^{-\pi a i}}{e^{\pi a i} - e^{-\pi a i}} = i\pi \frac{2 \cos(\pi a)}{2i \operatorname{sen}(\pi a)} = \pi \operatorname{cotan}(\pi a)$$

Apéndice B

Solución Analítica y Numérica de la Ecuación de Laplace

B.1. Introducción

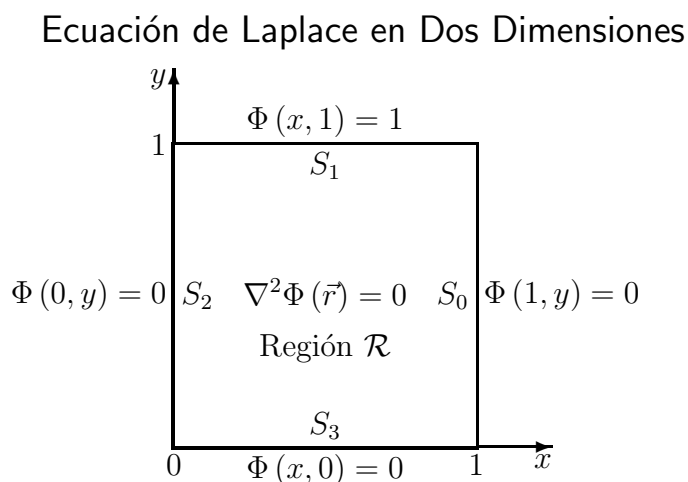


Figura B.1: Ilustración de la región $\mathcal{R} \equiv \{(x, y) \ni 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ donde se satisface la ecuación de Laplace. El conjunto $\{S_i, i = 0, 1, 2, 3\}$, son etiquetas de los diferentes lados del cuadrado.

Para discutir la solución numérica de la ecuación de Laplace usaremos un ejemplo simple en *dos dimensiones* como se ilustra en la Figura B.1. En esta se ilustra el problema de Dirichlet bidimensional

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi(\vec{r}) &= 0; & \vec{r} &\equiv (x, y), & 0 < x < 1, & 0 < y < 1 \\ \Phi(x, 0) &= 0, & 0 < x < 1 \\ \Phi(x, 1) &= 1, & 0 < x < 1 \\ \Phi(0, y) &= 0, & 0 < y < 1 \\ \Phi(1, y) &= 0, & 0 < y < 1 \end{aligned} \tag{B.1}$$

B.2. Solución Analítica

Una solución de la ecuación de Laplace bidimensional que satisface las condiciones de frontera en los segmentos S_0 , S_2 y S_3 es de la forma $\text{sen}(n\pi x) \text{senh}(n\pi y)$ con $n = 1, 2, 3, \dots$ (ver Figura (B.1)). La solución mas general posible es una combinación lineal de ellas:

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}(n\pi x) \text{senh}(n\pi y)$$

donde $\{A_n\}$ se determina imponiendo la condición de frontera en el segmento S_1 :

$$\Phi(x, 1) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}(n\pi x) \text{senh}(n\pi)$$

Usando la condición de ortogonalidad

$$\int_0^1 dx \text{sen}(n\pi x) \text{sen}(n'\pi x) = \frac{1}{2} \delta_{nn'}, \quad n, n' = 1, 2, 3, \dots$$

se obtiene

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\text{senh}(n\pi)} \int_0^1 dx \text{sen}(n\pi x) = \frac{2}{\text{senh}(n\pi)} \frac{-\cos(n\pi) + 1}{n\pi} = \frac{2}{n\pi} \frac{1 - (-1)^n}{\text{senh}(n\pi)} \\ &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} \frac{1}{\text{senh}(n\pi)}, & n \text{ impar} \\ 0 & , \quad n \text{ par} \end{cases} \end{aligned}$$

La solución del problema de Dirichlet (B.1) resulta ser

$$\Phi(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen}([2n+1]\pi x) \text{senh}([2n+1]\pi y)}{(2n+1) \text{senh}([2n+1]\pi)} \quad (\text{B.2})$$

Valores particulares del potencial en un punto dado (x, y) pueden obtenerse recurriendo a una evaluación numérica de la serie (B.2). En realidad, la evaluación directa de la serie puede ser complicada debido a los *cambios bruscos de signo* del término general de la serie. Dejamos al lector el estudio de esta complicación. Mientras tanto procedemos a una evaluación numérica que no hace uso explícito de la solución analítica (B.2)

B.3. Método Numérico

En este caso nos concentramos en la evaluación de $\Phi(x, y)$ en un conjunto discreto de puntos en la región \mathcal{R} . El proceso de discretización es ilustrado en la Figura B.2. Los valores del potencial son evaluados en un conjunto de puntos discretos de acuerdo a la equivalencia:

$$\Phi_{ij} \equiv \Phi(ih, jh); \quad i = 1, 2, \dots, N-2, \quad j = 1, 2, \dots, N-2, \quad h \equiv \frac{1}{N-1}$$

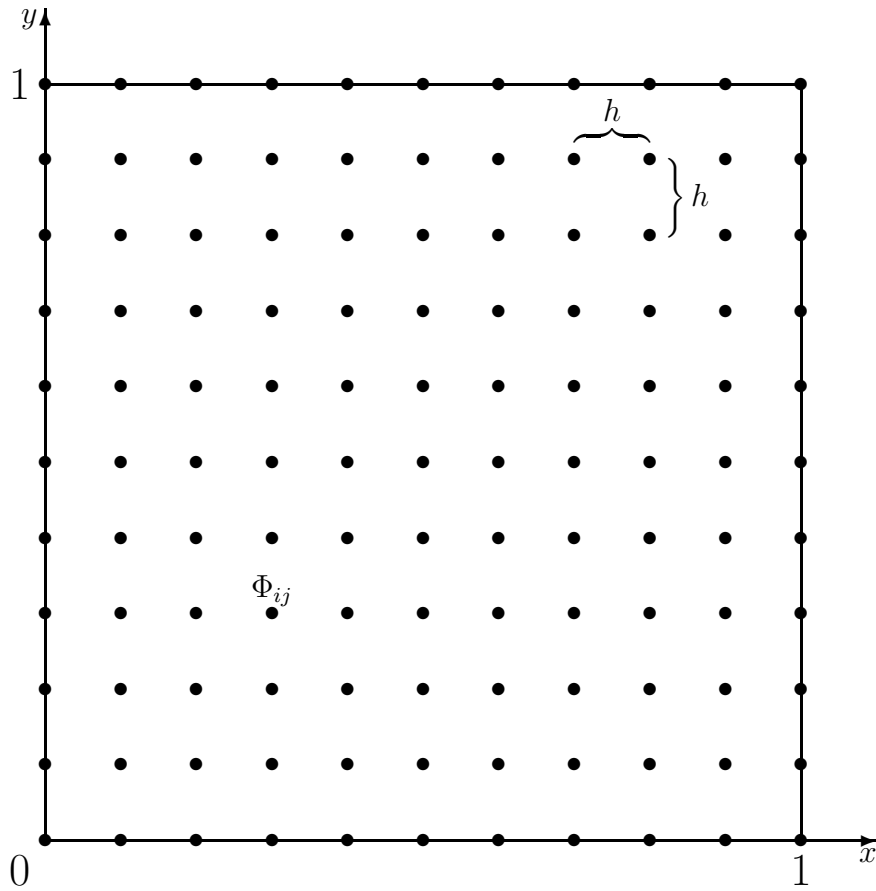


Figura B.2: La figura ilustra una discretización particular (11×11) de la región \mathcal{R} . En este caso particular, los valores del potencial en los puntos (\bullet) son almacenados en una matriz $N \times N$ con $N = 11$. El *paso* viene dado por $h = 1/(N - 1) = 1/10$.

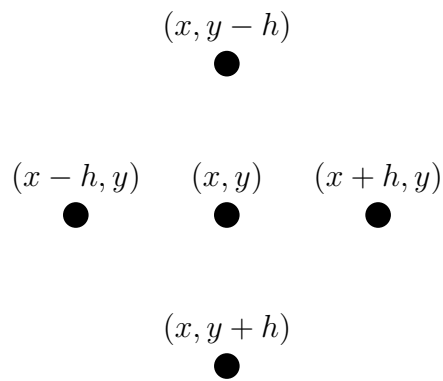


Figura B.3: Ilustración de un punto dado (x, y) y sus *vecinos mas cercanos*. $x \equiv ih$, $y \equiv jh$. $i, j = 1, 2, \dots, N - 2$.

Note que los índices $i = 0, i = N - 1, j = 0$ y $j = N - 1$ corresponden a la frontera donde los valores de $\Phi(x, y)$ o/y Φ_{ij} han sido preestablecidos (problema de Dirichlet). Ver Figura B.2.

Para derivar la versión discreta de la ecuación de Laplace, desarrollamos en potencias de h (serie de Taylor) a $\Phi(x \pm h, y)$ y/o $\Phi(x, y \pm h)$ (ver Figura (B.3)):

$$\Phi(x - h, y) = \Phi(x, y) - \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Phi(x, y)}{\partial x^2} h^2 + O(h^3)$$

$$\Phi(x + h, y) = \Phi(x, y) + \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Phi(x, y)}{\partial x^2} h^2 + O(h^3)$$

$$\Phi(x, y - h) = \Phi(x, y) - \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial y} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Phi(x, y)}{\partial y^2} h^2 + O(h^3)$$

$$\Phi(x, y + h) = \Phi(x, y) + \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial y} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Phi(x, y)}{\partial y^2} h^2 + O(h^3)$$

Sumando estas expresiones, miembro a miembro, se obtiene

$$\Phi(x - h, y) + \Phi(x + h, y) + \Phi(x, y - h) + \Phi(x, y + h) = 4\Phi(x, y) + h^2 \nabla^2\Phi(x, y) + O(h^4)$$

tal que

$$\nabla^2\Phi(x, y) = -\frac{4}{h^2} \left[\Phi(x, y) - \frac{\Phi(x - h, y) + \Phi(x + h, y) + \Phi(x, y - h) + \Phi(x, y + h)}{4} \right] + O(h^2)$$

Salvo correcciones de orden h^2 , la ecuación de Laplace bidimensional

$$\nabla^2\Phi(x, y) = \frac{\partial^2\Phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{B.3})$$

se satisface, en la región \mathcal{R} , si

$$\Phi(x, y) = \frac{\Phi(x - h, y) + \Phi(x + h, y) + \Phi(x, y - h) + \Phi(x, y + h)}{4} \quad (\text{B.4})$$

la cual puede reescribirse con índices discretos como

$$\Phi_{ij} = \frac{\Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i+1,j}}{4} \quad (\text{B.5})$$

Note que, salvo correcciones de orden h^2 , la solución muestra que el valor de $\Phi(x, y)$ (versión discreta es Φ_{ij}) en cada punto $(x = ih, y = jh)$ es el promedio de sus *vecinos mas cercanos*.

Para proceder a la evaluación numérica realizamos los siguientes pasos:

1. Creación de una matriz $N \times N$ la cual inicializamos al azar con valores en $(0, 1)$. Los valores mínimos y máximos de Φ_{mn} descansan en la frontera. Por tanto, en este paso es suficiente escoger valores al azar tal que $0 < \Phi_{ij} < 1, \forall i, j = 1, 2, \dots, N - 2$. Puesto que (B.3) solo se satisface hasta orden h^2 , solo puede exigirse que $h^2 > \epsilon_{PM}$ donde ϵ_{PM} es la *precisión de la máquina*¹. Ello significa que N está limitado por la desigualdad $N < 1 + 1/\sqrt{\epsilon_{PM}}$. Así mismo, la *tolerancia* de la evaluación no puede ser menor que ϵ_{PM} o un poco mayor que esta para prevenirse de errores de redondeo. El lector interesado en el tema puede consultar la referencia[Acton].
2. A continuación realizamos un proceso iterativo donde los elementos de matriz (con índices $i, j = 1, 2, \dots, N - 2$) son actualizados de acuerdo a la expresión (B.5). Un criterio de convergencia simple observa la conducta o convergencia del valor $\Phi(1/2, 1/2)$ puesto que el punto $(1/2, 1/2)$ es el *punto central*. Ello implica que N debe ser un número impar. Usando argumentos de simetría se demuestra que (*j exactamente !*) $\Phi(1/2, 1/2) = 1/4 = 0,25$

El programa, en C++, `laplace0.cc` implementa estos pasos.

```
// laplace0.cc
#include <cfloat>
#include <cstdlib>
#include <ctime>
#include <iomanip>
#include <iostream>
#include <stdexcept>
#include <vector>
using namespace std;
const double PASO=0.01,RANDMAX1=floor(RAND_MAX + 1.5);
const double TOL=1.1*sqrt(DBL_EPSILON);
const size_t NMAX=static_cast<size_t>(1.0 + 1.0/TOL);
//=====
struct Matriz: public vector<vector<double> >
{
    size_t ultimo;

    // Constructores
    Matriz(): vector<vector<double> >(), ultimo(0) {}

    // Metodos
    void actualize();
};
```

¹Esta se define como el valor mínimo positivo ($\epsilon_{PM} > 0$) tal que *la máquina* puede *asegurar* que $1 + \epsilon_{PM} > 1$. La biblioteca *standard cfloat*, de C++, la define como `DBL_EPSILON`.

```

void Matriz::actualize()
{
    size_t i=1U,j;

    while ( i<ultimo ) {
        for ( j=1U ; j<ultimo ; ++j ) {
            (*this)[i][j]=((*this)[i - 1U][j] + (*this)[i + 1U][j]
                +
                (*this)[i][j - 1U] + (*this)[i][j + 1U])/4.0;
        }
        ++i;
    }
}
//=====
void inicialize(Matriz &m);

inline size_t valorDeN()
{
    size_t n=static_cast<size_t>(1.0 + 1.0/PASO);

    if ( (n%2U)==0 ) ++n;
    if ( n<=NMAX ) return n;
    throw range_error("size_t valorDeN()");
}

```



```

int main()
{
    Matriz Phi;

    try { inicialize(Phi); }
    catch(const range_error &re) {
        cerr<<endl<<"Error de rango en "<<re.what()<<endl;
    }

    const size_t iteraciones=Phi.size()*Phi.size(),medio=(Phi.size())>>1U;
    cout<<setprecision(20)<<0<<' '<<Phi[medio][medio]<<endl;
    double error_r=0;
    size_t n=0;
    while ( ++n<iteraciones ) {
        Phi.actualize();
        cout<<n<<' '<<Phi[medio][medio]<<endl;
        if ( (error_r=abs(1.0 - 4.0*Phi[medio][medio]))<TOL ) break;
    }

    cerr<<"\n    Numero de iteraciones = "<<n;
    cerr<<"\n        Error relativo = "<<(error_r*100.0)<<" %";
    cerr<<"\n        Phi(1/2,1/2) = "<<Phi[medio][medio]<<endl;

    return 0;
}

```

```

void inicialize(Matriz &m)
{
  try { m.resize(valorDeN()); } catch(const range_error &re) { throw; }

  cerr<<"\nDimensiones de la matriz = "<<m.size()<<" X "<<m.size();
  const double temp=1.0/m.size();
  cerr<<"\n          Paso = "<<(temp/(1.0 - temp));

  m.ultimo=m.size() - 1U;
  m[0].resize(m.size());
  size_t j=0;
  while ( j<m.size() ) m[0][j++]=1.0;

  srand(size_t(time((time_t *)0)));
  for ( size_t i=1U ; i<m.ultimo ; ++i ) {
    m[i].resize(m.size());
    m[i][0]=m[i][m.ultimo]=0;
    for ( j=1U ; j<m.ultimo ; ++j ) m[i][j]=rand()/RANDMAX1;
  }

  m[m.ultimo].resize(m.size());
  for ( j=0 ; j<m.size() ; ++j ) m[m.ultimo][j]=0;
}

```

Una ejecución típica de este programa arroja, por pantalla, la información:

```

Dimensiones de la matriz = 101 X 101
          Paso = 0.01
Numero de iteraciones = 10201
Error relativo = 0.00696642 %
Phi(1/2,1/2) = 0.250017

```

La iteración de $\Phi(1/2, 1/2)$ puede observarse en la Figura B.4.

Solución Numérica de la Ecuación de Laplace

Iteración de $\Phi(1/2,1/2)$

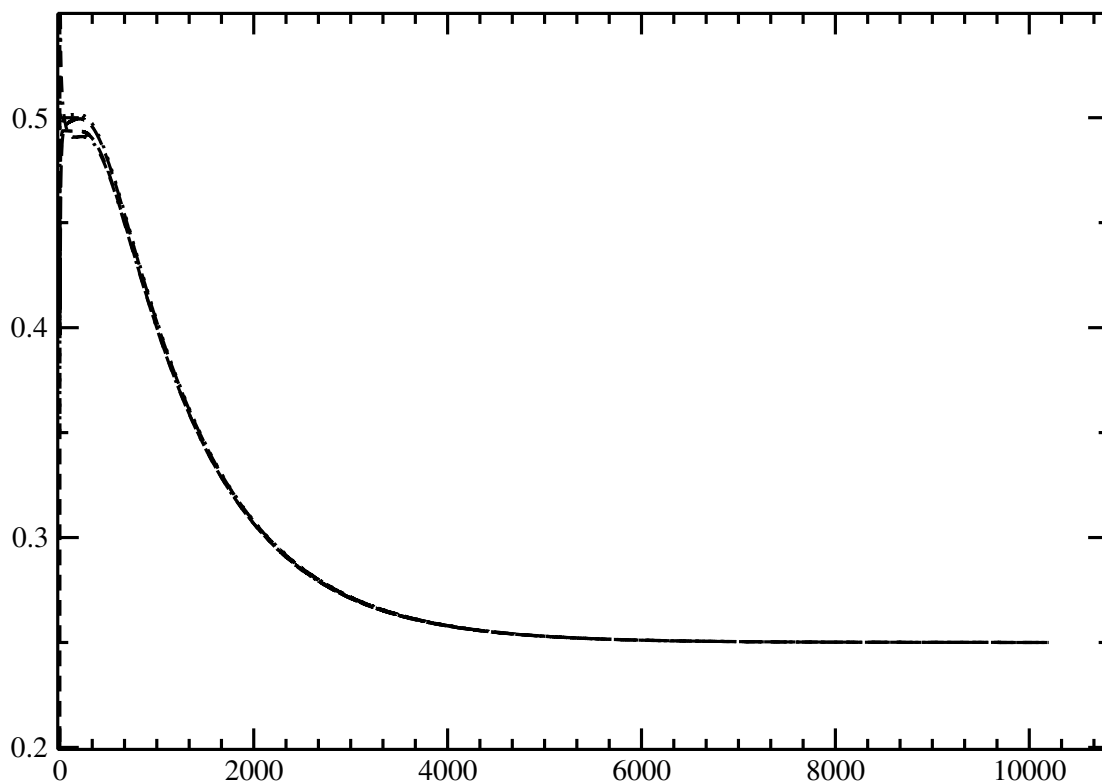


Figura B.4: Cuatro evaluaciones independientes de la evolución de $\Phi(1/2, 1/2)$ con el número de iteraciones. La evaluación es realizada con el programa, en C++, `laplace0.cc`. Note que, independiente del valor inicial de $\Phi(1/2, 1/2)$, $\Phi(1/2, 1/2)$ converge a un valor cercano a 0,25 el cual es *obviamente* el valor exacto.

Bibliografía

- [Abramowitz] **Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.** M. Abramowitz & I. A. Stegun. Dover Publications 1965.
- [Acton] **Numerical Methods that *Usually* Work.** F. S. Acton. The Mathematical Association of America 1997.
- [Arfken] **Mathematical Methods For Physicists.** G. B. Arfken & H. J. Weber. 6^a ed. Academic Press 2005.
- [Batygin] **Problems in Electrodynamics.** V. V. Batygin & I. N. Toptygin. Academic Press 1978.
- [Bleistein] **Asymptotic Expansions of Integrals.** N. Bleistein & R. A. Handelsman. Dover Publications. Inc. New York 1986.
- [Brown] **Complex Variables and Applications.** J. W. Brown & R. V. Churchill. 7^a ed. McGraw-Hill Science/Engineering/Math 2003.
- [Carrier] **Partial Differential Equations: Theory and Technique.** G. F. Carrier & C. E. Pearson. Academic Press 1976.
- [Cartan] **Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables.** H. Cartan. Addison-Wesley 1963.
- [Churchill] **Operational Mathematics.** R. V. Churchill. Mc Graw-Hill 1972.
- [Dennery] **Mathematics for Physicists.** P. Dennery & A. Krzywicki. Dover Publications (nueva edición) 1996.
- [Erdelyi] **Asymptotic Expansions.** A. Erdelyi. Dover Publications. Inc. New York 1956.
- [Gradshteyn] **Table of Integrals, Series and Products.** I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, A. Jeffrey & D. Zwillinger. 6^a ed. Academic Press 2000.
- [Lanczos] **Applied Analysis.** C. Lanczos. Dover Publications 1988.
- [Lieb] **Mathematical Physics in One Dimension: Exactly Soluble Models of Interacting Particles (Perspectives in Physics: A Series of Reprint Collections).** E. H. Lieb & D. C. Mattis. Academic Press 1966.

- [Migdal] **Approximation Methods in Quantum Mechanics.** A. B. Migdal & V. P. Krainov. Frontier in Physics. W. A. Benjamin Inc. 1969.
- [Morse] **Methods of Theoretical Physics. Part. I & II.** P. Morse & H. Feshbach. 1^a ed. Feshbach Publishing 2005.
- [Murray] **Asymptotic Analysis (Applied Mathematical Sciences).** J. D. Murray. 1^a ed. Springer 1984.
- [Nayfeh] **Nonlinear Oscillations.** A. H. Nayfeh & D. T. Mook. John Wiley & Sons Inc. 1995.
- [Petrovski] **Lecciones de Teoría de las Ecuaciones Integrales. I.** Petrovski. Editorial Mir (Moscú) 1971.
- [Rudin] **Principles of Mathematical Analysis (International Series in Pure & Applied Mathematics).** W. Rudin. McGraw-Hill Publishing Co., 3rd Rev Ed edition 1976.
- [Smirnov] **Problemas de Ecuaciones de la Física Matemática.** M. M. Smirnov. Editorial Mir (Moscú) 1976.
- [Torres] **Curso en Métodos de la Física Teórica².** P. L. Torres. Publicado por la Escuela de Física. Fac. de Ciencias (UCV). 2006.
- [Whittaker] **A Course of Modern Analysis.** E. T. Whittaker & G. N. Watson. Cambridge University Press 1973.

²Si desea adquirir un ejemplar de la referencia[Torres], visite

<http://fisica.ciens.ucv.ve/publicaciones.html>