UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
`http://fisica.ciens.ucv.ve/felix/postgrado/`

01 / abril / 2010
Prof. Félix Marín
TAREA[1] Nº 3

1. Considere un gas de electrones sin espin, en un cristal, descrito en el límite atómico por el hamiltoniano $E_0 \sum_i a_i^\dagger a_i$ donde $\{i\}$ son índices de sitios del cristal. E_0 es medido respecto del potencial químico. Tal gas interactua con un gas de fonones de Einstein (descritos por $\omega_E \sum_{\vec{q}} b_{\vec{q}}^\dagger b_{\vec{q}}, \quad \omega_E > 0$). El acoplamiento entre ambos subsistemas se debe a las vibraciones locales de cada sitio y, en un modelo simplificado, viene dado por $g \sum_{ij\vec{q}} a_i^\dagger a_j \left(b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^\dagger \right)$. $g \in \mathbf{R}$. Construya un hamiltoniano equivalente para el sistema electrónico (hasta orden g^2) por *" eliminación "* del término lineal en g y en el límite de bajas temperaturas ($k_B T \ll \omega_E$). En tal límite cualquier ocupación de fonones es *" desechada "* y el resultado final se obtiene promediando termodinámicamente sobre el baño de fonones.

2. Considere un sistema de N espines $\{\vec{\sigma}_{\vec{n}} \ni \vec{\sigma}_{\vec{n}}^2 = 3/4\}$ (en el límite termodinámico) en una red cúbica simple de constante de red a. Tales espines interactuan de acuerdo al modelo de Ising

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\vec{m},\vec{n}} \mathrm{J}\left(\vec{m} - \vec{n}\right) \sigma_{\vec{m}}^z \sigma_{\vec{n}}^z$$

$\vec{m}$ y $\vec{n}$ son vectores de la red. $\mathrm{J}\left(\vec{m}\right) = J > 0$ si $\vec{m}$ es un *" vecino mas cercano "* al origen y <u>cero</u> en cualquier otro caso. Tal sistema se encuentra en equilibrio termodinámico a la temperatura T.

   a) Demuestre que, en la *aproximación de campo medio*, el hamiltoniano se *reduce* a $H_{cm} \equiv \sum_{\vec{m}\vec{n}} \mathrm{J}\left(\vec{m} - \vec{n}\right) \langle \sigma_{\vec{m}}^z \rangle \langle \sigma_{\vec{n}}^z \rangle /2 - \sum_{\vec{m}} \sigma_{\vec{m}}^z \sum_{\vec{n}} \mathrm{J}\left(\vec{m} - \vec{n}\right) \langle \sigma_{\vec{n}}^z \rangle$.

   b) Evalue la energía libre de Helmholtz F_{cm}. No suponga que $\langle \sigma_{\vec{n}}^z \rangle$ es independiente de $\vec{n}$ lo cual permitirá posteriormente el estudio de variaciones espaciales.

   c) A partir de F_{cm}, determine las ecuaciones de consistencia que determinan $\left\langle \sigma_{\vec{\ell}}^z \right\rangle, \forall \vec{\ell}$. Exprese la solución en términos de $\mathrm{H}_z\left(\vec{m}\right) \equiv -\left(1/\mu_\mathrm{B}\right) \sum_{\vec{n}} \mathrm{J}\left(\vec{m} - \vec{n}\right) \langle \sigma_{\vec{n}}^z \rangle$ (*componente z del campo magnético efectivo*). μ_B es el *magnetón de Bohr*.

   d) Demuestre que cerca de la temperatura de transición magnética T_c $\left(T \lesssim T_c \right)$ para el caso de *campo uniforme* la ecuación de consistencia, para un $\vec{\ell}$ dado, se reduce a

$$\mathrm{H}_z\left(\vec{\ell}\right) \approx \frac{1}{4} \beta \sum_{\vec{m}} \mathrm{J}\left(\vec{\ell} - \vec{m}\right) \mathrm{H}_z\left(\vec{m}\right) - \frac{1}{16} \beta^3 {\mu_\mathrm{B}}^2 \sum_{\vec{m}} \mathrm{J}\left(\vec{\ell} - \vec{m}\right) \mathrm{H}_z^3\left(\vec{m}\right)$$

   e) Demuestre que cuando el campo (y/o la magnetización) varía *suavemente* la expresión anterior se reduce a una *ecuación de Ginzburg-Landau*. Precise la condición de *variación suave* mencionada arriba.

---

[1] FECHA DE ENTREGA: **miércoles 14 de abril de 2010 ($\leq$ 5 p.m.)**
`No se aceptarán tareas realizadas en computador.`