

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

Métodos Matemáticos de la Física II (2424)

<http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos.html>

Tarea 5

Cálculo en la variable compleja

Funciones Gamma y Beta

[http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos\(t5\).pdf](http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos(t5).pdf)

1°) **Dos integrales parecidas:** (a) En la Tarea 4 (problema 7°, parte b) usted calculó la siguiente integral:

$$I_1(a > 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos(x)}{a^2 + x^2}. \quad (1.1)$$

Allí se consideró la función compleja $F(z) = \exp(iz)/(a^2 + z^2)$ y se tomó como contorno de integración C el eje real $[-R, +R]$ y un semicírculo en el semiplano superior Γ ($\Rightarrow C = [-R, +R] \oplus \Gamma$). Finalmente se dejó que el radio R del semicírculo tendiera a infinito. (b) Ahora evalúe la siguiente integral:

$$I_2(a > 0) = \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos(x)}{a^2 - x^2}. \quad (1.2)$$

Ayuda: considere la función compleja $F(z) = \exp(iz)/(a^2 - z^2)$ y tome como contorno de integración C el eje real desde $x = -R$ hasta $x = +R$ pasando por encima de las singularidades del integrando con semicírculos Γ_1 y Γ_2 , y un semicírculo en el semiplano superior Γ . Una vez más, deje que el radio R del semicírculo Γ sea infinitamente grande, y que los radios r_1 y r_2 de los semicírculos Γ_1 y Γ_2 tiendan a cero. Nota: justifique todos sus resultados.

2°) **Vea como aparece inesperadamente la función Gamma:** una partícula de masa m se mueve sobre el eje x bajo la acción de una fuerza de atracción hacia el origen O dada por $\mathbf{F} = -(k/x)\hat{\mathbf{i}}$, donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad. Si la partícula parte del reposo en $x = a > 0$, encuentre el tiempo que necesita para llegar a O . Ayuda: aquí tiene la respuesta:

$$T_v = a\sqrt{\frac{m}{2k}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \quad (2.1)$$

3°) **Use la función Gamma para demostrar estos resultados:**

$$(a) \int_0^1 dx x^m \ln^n(x) = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}, \quad n \text{ entero y } m > -1. \quad (3.1)$$

$$(b) \int_0^{\infty} dx \exp(-ax^2) \cos(bx) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right). \quad (3.2)$$

4°) **La función Gamma tiene polos en el eje real negativo:** muestre que es posible continuar

analíticamente la función gamma por medio de la siguiente fórmula:

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(z+k)} + \int_1^{+\infty} du u^{z-1} \exp(-u). \quad (4.1)$$

Nota: la integral es una función analítica de z en la región $\text{Re}(z) > 0$.

5°) **¿El pozo cuadrado infinito?** considere la siguiente secuencia de funciones energía potencial:

$$U_k(x) = c \left(\frac{x}{a} \right)^{2k}, \quad k \in \{1, 2, 3, \dots\}, \quad (5.1)$$

donde $c > 0$ y $a > 0$ son constantes. (a) Dibuje aproximadamente $U_1(x)$, $U_3(x)$ y $U_5(x)$ en el intervalo $x \in [-a, +a]$ ¿Cómo es el comportamiento de $U_k(x)$ a medida que k aumenta? Como usted sabe, según el postulado de Bohr-Wilson-Sommerfeld, la condición que cuantiza los estados clásicos de un sistema periódico unidimensional es:

$$\frac{1}{2\pi} \oint dx p(x) = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.2)$$

donde $p(x)$ es el momentum de la partícula y la integral se toma sobre la trayectoria real hecha por la partícula durante un período de oscilación. La regla de cuantización (5.2) nos proporciona un método para determinar aproximadamente los niveles de energía cuantizados de la partícula, es decir, para obtener la energía en función de n . En nuestro caso, la partícula clásica, con energía E , se mueve en el rango $x \in [-x_m, +x_m]$, donde

$$x_m = a \left(\frac{E}{c} \right)^{\frac{1}{2k}}. \quad (5.3)$$

La integral en (5.2) es entonces

$$\oint dx p(x) = 4 \int_0^{+x_m} dx p(x), \quad \text{con} \quad p(x) = \sqrt{2m} \sqrt{E - c \left(\frac{x}{a} \right)^{2k}}. \quad (5.4)$$

(b) Haga un cambio de variables para reescribir la integral en (5.4). Ayuda: aquí tiene el cambio: $c(x/a)^{2k} = Ey^{2k}$. (c) Haga ahora otro cambio de variable para escribir la integral obtenida en (b) en términos de la función Beta de Euler. Si lo ha hecho bien, usted deberá obtener el siguiente resultado:

$$\oint dx p(x) = \frac{2a}{k} (2m)^{\frac{1}{2}} E^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}} c^{-\frac{1}{2k}} B\left(\frac{1}{2k}, \frac{3}{2}\right). \quad (5.5)$$

Recuerde que la función Beta se define así:

$$B(m, n) = \int_0^1 du u^{m-1} (1-u)^{n-1}. \quad (5.6)$$

(d) Encuentre ahora la energía $E \equiv E_{n,k}$ a partir de (5.2). Ayuda: esto es un simple despeje, sin embargo, concéntrese para que no se equivoque. (e) Finalmente, tome el límite de $E_{n,k}$ cuando k tiende a infinito ¡Explique el resultado obtenido! ¿Cuál problema cuántico acaba usted de resolver? Nota: yo creo (sinceramente) que usted puede obtener este límite (no se asuste ya que es muy fácil). Le escribo

aquí el resultado:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_{n,k} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{2a} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.7)$$

Recuerde que la función Beta se relaciona con la función Gamma a través de la relación:

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}. \quad (5.8)$$

Asimismo, la siguiente serie le será muy útil:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z + \gamma z^2 + \dots, \quad \gamma = 0,57721 \quad (5.9)$$

(γ es la llamada constante de Euler-Mascheroni). Nota: para ser más precisos, esta constante se define como

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right) = 0,5772156\dots \quad (5.10)$$

6°) **Otra forma de escribir la función Beta:** demuestre el siguiente resultado:

$$B(m, n) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^{2m-1}(\theta) \cos^{2n-1}(\theta). \quad (6.1)$$

7°) **Una fórmula muy útil:** demuestre que si

$$\int_0^{+\infty} dx \frac{x^{p-1}}{x+1} = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}, \quad 0 < p < 1, \quad (7.1)$$

entonces

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)} \quad (7.2)$$

(En ocasiones, (7.2) es llamada la “fórmula complemento” y también es conocida como la “fórmula de reflexión” para la función Gamma).

8°) **Demuestre los siguientes resultados:**

$$(a) \int_0^2 dx \sqrt{x(2-x)} = \frac{\pi}{2}. \quad (8.1)$$

$$(b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sqrt{\tan(x)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}. \quad (8.2)$$

9°) **Demuestre la llamada fórmula de duplicación de Legendre:**

$$\Gamma(p) \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}} \Gamma(2p). \quad (9.1)$$