Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

Métodos Matemáticos de la Física II (2424)
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos.html`

Tarea 0 (Especial)
Preliminares
Funciones generalizadas
`http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/metodosmatematicosdos(t0e).pdf`

1°) **Sobre los efectos del potencial delta de Dirac en una dimensión:** suponga conocidas las soluciones $w_\alpha(x)$ de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}w_\alpha(x) + V(x)w_\alpha(x) = E_\alpha w_\alpha(x), \tag{1.1}$$

las cuales satisfacen una relación de ortonormalidad "a la Dirac" $\langle w_\alpha, w_{\alpha'}\rangle = \delta(\alpha - \alpha')$. Por otro lado, necesitamos resolver la siguiente ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) + \lambda\delta(x)\psi(x) = E\psi(x), \tag{1.2}$$

donde λ es un parámetro real (el "strength de la delta"). Pues bien, la solución $\psi(x)$ de (1.2) se puede escribir en términos de las soluciones de (1.1) así:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, c(\alpha)w_\alpha(x). \tag{1.3}$$

(a) Sustituya (1.3) en los dos primeros términos a la izquierda en (1.2). Ahora use la ecuación (1.1) para eliminar el término que tiene la derivada segunda así como el que tiene el potencial $V(x)$. Finalmente, multiplique escalarmente por $w_{\alpha'}(x)$ a la ecuación que obtuvo y despeje $c(\alpha')$. Nota: Si lo ha hecho bien, usted habrá encontrado la siguiente expresión para las soluciones de (1.2)

$$\psi(x) = \lambda\psi(0)\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, \frac{w_\alpha^*(0)w_\alpha(x)}{E - E_\alpha},$$

donde el asterisco corresponde a la conjugación compleja. La cantidad $\psi(0)$ se puede determinar de la condición de normalización para $\psi(x)$. (b) Suponga que $V(x) = 0$ y $\lambda \equiv -g < 0$ ¿cuales son las soluciones $w_\alpha(x)$ de (1.1) en este caso? (c) Encuentre $\psi(x)$. Si le interesó el problema, le recomiendo consultar la referencia: D. A. Atkinson y H. W. Crater, "An exact treatment of the Dirac delta function potential in the Schrödinger equation," Am. J. Phys, **43**, 301 (1975).

2°) **Sobre la transformada de Fourier de la función de Heaviside:** (a) Como el Profesor demostró en clase, la transformada de Fourier

$$\mathcal{F}[\psi(x)] \equiv \phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi(x)\exp(-ikx) \tag{2.1}$$

de la llamada función de Heaviside $\psi(x) = \Theta(x)$ ($\Theta(x) = 1$, para $x > 0$ y $\Theta(x) = 0$, para $x < 0$) es:

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-i \,\mathrm{P.V.} \left(\frac{1}{k} \right) + \pi \delta(k) \right] \tag{2.2}$$

¡Demuéstrelo usted! Ayuda: es claro que

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{+\infty} dx \, \exp(-i(k - i\epsilon)x), \tag{2.3}$$

ahora haga la integral en (2.3) y use el siguiente resultado:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{k \pm i\epsilon} = \mathrm{P.V.} \left(\frac{1}{k} \right) \mp i\pi\delta(k). \tag{2.4}$$

(b) Sustituya el resultado (2.2) en la expresión que da la transformada inversa de Fourier de $\phi(k)$:

$$\mathcal{F}^{-1}[\phi(k)] \equiv \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \, \phi(k) \exp(+ikx) \tag{2.5}$$

¿Que encontró? Ayuda: la siguiente integral le será útil:

$$\int_0^{+\infty} dk \, \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi}{2} \mathrm{sgn}(x), \tag{2.6}$$

donde $\mathrm{sgn}(x)$ es la llamada función signo ($\mathrm{sgn}(x) = 1$, para $x > 0$ y $\mathrm{sgn}(x) = -1$, para $x < 0$). (c) Usando la fórmula (2.2), demuestre la relación:

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \exp(ikx). \tag{2.7}$$

3°) **Sobre la representación integral (de Fourier) de la delta de Dirac:** como se demostró en clase (y usted comprobó en la pregunta (c) del segundo problema de esta tarea), la delta de Dirac puede escribirse así:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \, \exp(ikx). \tag{3.1}$$

En este problema intentaremos otra demostración de (3.1). (a) Defina la siguiente función de x y demuestre que es real:

$$F(x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dk \, \exp(ikx). \tag{3.2}$$

(b) Integre a $F(x)$ desde $x = -A$ hasta $x = +B$, donde $A > 0$ y $B > 0$ y obtenga el siguiente resultado preliminar:

$$\int_{-A}^{+B} dx \, F(x) = \int_{-A}^{+B} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \, dx \, \cos(kx) = \lim_{\alpha \to \infty} \lim_{\beta \to \infty} \int_{-A}^{+B} \int_{-\alpha}^{+\beta} dk \, dx \, \cos(kx), \tag{3.3}$$

donde $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Ahora resuelva la integral en k y obtenga el resultado que sigue:

$$\int_{-A}^{+B} dx \, F(x) = \lim_{\beta \to \infty} \int_{-A}^{+B} dx \, \frac{\sin(\beta x)}{x} + \lim_{\alpha \to \infty} \int_{-A}^{+B} dx \, \frac{\sin(\alpha x)}{x}. \tag{3.4}$$

(c) Haga el cambio $u = \beta x$ en la primera integral y $u = \alpha x$ en la segunda integral, entonces los límites pasan a ser $-\beta A$ a βB y $-\alpha A$ a αB, respectivamente. Compruebe que se obtiene el siguiente resultado:

$$\int_{-A}^{+B} dx\, F(x) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} du\, \frac{\sin(u)}{u} = 2\pi, \tag{3.5}$$

donde la última integral la puede obtener del resultado (2.6) del segundo problema de esta tarea. Note que el resultado final (3.5) es independiente de los valores de A y B mientras $A > 0$ y $B > 0$. Ya que A y B pueden hacerse tan pequeños como queramos, toda contribución al valor de la integral debe provenir del punto $x = 0$ y ya que A y B son arbitrarios, todos los puntos $x \neq 0$ no deben tener ninguna contribución a la integral, por lo tanto

$$F(x) = 2\pi\delta(x) \tag{3.6}$$

¿Que le pareció el método?

4°) **Sobre la llamada fórmula de suma de Poisson:** en este problema derivaremos una fórmula que se usa frecuentemente en la física matemática en aquellos casos en los cuales la solución de un problema da una serie infinita. Esta es la llamada fórmula de suma de Poisson y por simplicidad la derivaremos en el caso unidimensional. Considere la siguiente función que está definida en términos de una serie:

$$S(x) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} f(x + qL), \tag{4.1}$$

donde f es una función arbitraria. (a) Demuestre que $S(x)$ es periódica, con periodo fundamental L. (b) Si ha demostrado que $S(x)$ es periódica entonces podrá expresarla en una serie de Fourier, es decir

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(i\frac{2\pi n}{L}x\right), \tag{4.2}$$

donde los coeficientes c_n vienen dados por

$$c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} dx\, S(x) \exp\left(-i\frac{2\pi n}{L}x\right) \tag{4.3}$$

¡Demuéstrelo! (c) Sustituya la serie (4.1) en (4.3) y saque la suma de la integral, ahora haga el cambio de variable $y = x + qL$ y realice la suma sobre q. Si lo ha hecho bien habrá obtenido el siguiente resultado

$$c_n = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y) \exp\left(-i\frac{2\pi n}{L}y\right). \tag{4.4}$$

(d) Note que el resultado (4.4) es practicamente la Transformada de Fourier de f, en efecto,

$$\phi\left(\frac{2\pi n}{L}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y) \exp\left(-i\frac{2\pi n}{L}y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}Lc_n. \tag{4.5}$$

Sustituya c_n en términos de ϕ (obtenida de (4.5)) en la suma (4.2):

$$S(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{L}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi\left(\frac{2\pi n}{L}\right) \exp\left(i\frac{2\pi n}{L}x\right). \tag{4.6}$$

Esta es precisamente la fórmula de suma de Poisson. (e) Demuestre que en el caso en que f es la delta de Dirac, la fórmula de Poisson nos proporciona el siguiente interesante resultado:

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty} \delta(x+qL) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\frac{2\pi n}{L}x\right). \tag{4.7}$$

(f) La suma de funciones delta de Dirac (regularmente espaciadas) en (4.7) puede considerarse una función periódica de periodo (fundamental) L. Encuentre su expansión en una serie de Fourier pero en términos de exponenciales imaginarias. Ayuda: el resultado es precisamente la fórmula (4.7) pero usted lo debe demostrar. En efecto, escriba

$$S(x) \equiv \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \delta(x+qL) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n u_n(x), \tag{4.8}$$

donde

$$c_n = \langle u_n, S\rangle = \int_{-L/2}^{+L/2} dx\, \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left(-i\frac{2\pi n}{L}x\right)(\cdots + \delta(x-L) + \delta(x) + \delta(x+L) + \cdots). \tag{4.9}$$

Finalmente sustituya el resultado obtenido en (4.9) en (4.8). (g) Calcule la transformada de Fourier $\phi(k)$ de la función $S(x)$ ¿Que puede concluir? Ayuda: aquí tiene el resultado

$$\phi(k) = \frac{\sqrt{2\pi}}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(k - \frac{2\pi n}{L}\right). \tag{4.10}$$

(h) Demuestre la fórmula de Parseval-Plancherel generalizada:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \left(\phi(k)\right)^* \psi(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \left(S(x)\right)^* F(x), \tag{4.11}$$

donde $\phi(k)$ y $\psi(k)$ son las transformadas de Fourier de $S(x)$ y $F(x)$, respectivamente. (i) Sustituya la serie $S(x)$ escrita en (4.8), así como su transformada de Fourier $\phi(k)$ (que usted obtuvo en la pregunta (g)), en la fórmula (4.11). Luego de hacer las integrales a ambos lados ¿que resultado obtuvo? Ayuda: aquí tiene la respuesta

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{2\pi n}{L}\right) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} F(qL) \tag{4.12}$$

¿Como se relaciona este resultado con la fórmula de suma de Poisson?